سیگنالهای زمان گسسته

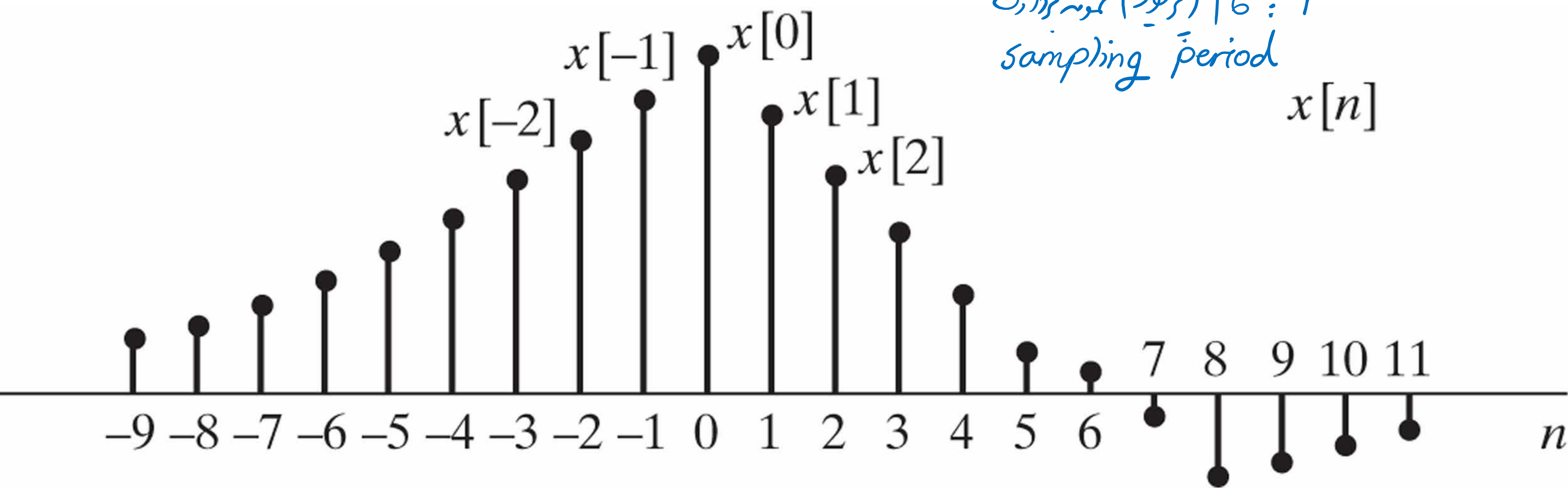
Figure 2.1 Graphic representation of a discrete-time signal.

$x = \{x[n]\}, \quad -\infty < n < +\infty$

$x[n] = x_a(nT), \quad -\infty < n < +\infty$ نمونه برداری در فصل ۴ بحث خواهد شد

T: گام (پریود) نمونه برداری

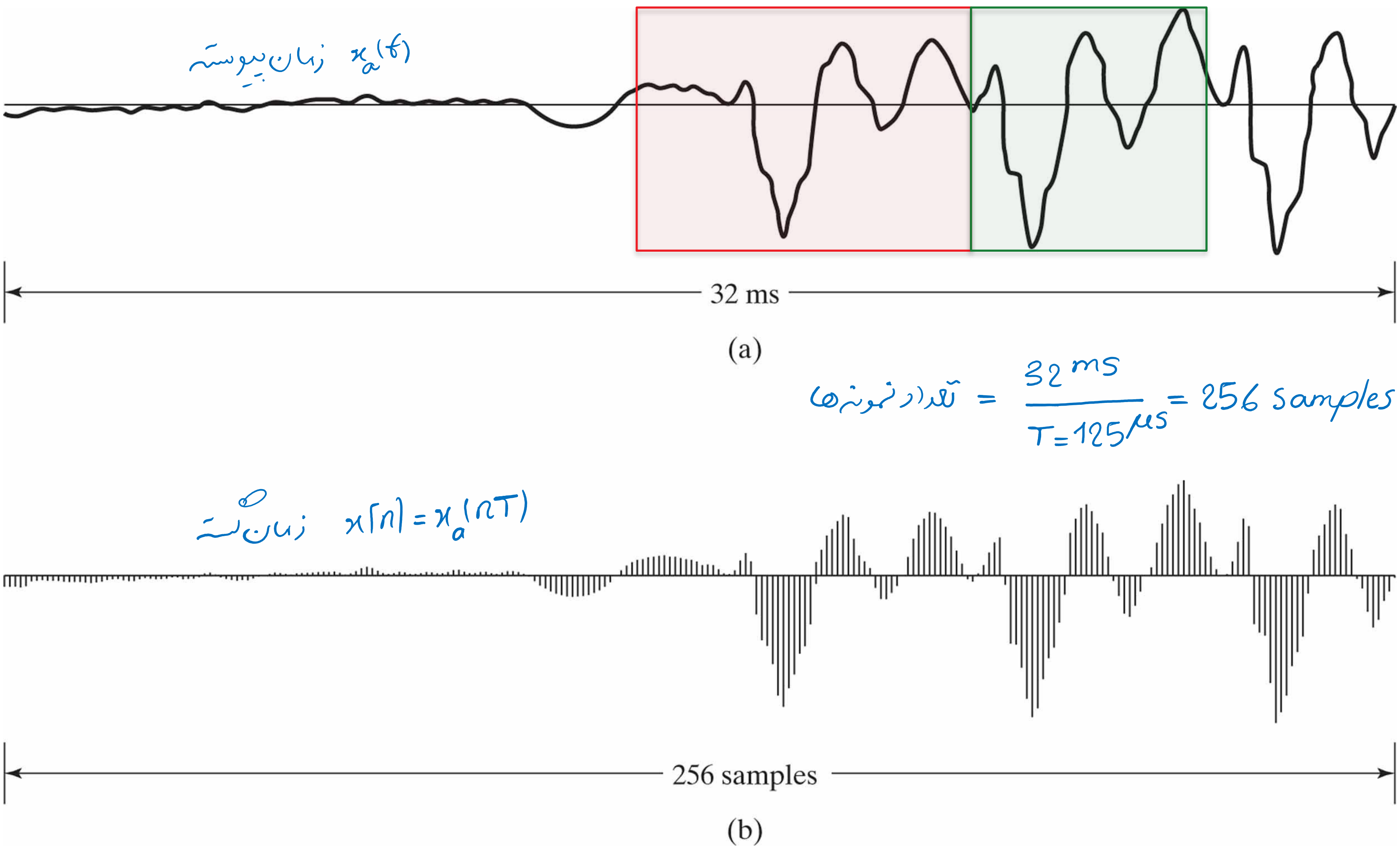
sampling period



PEARSON
Discrete-Time Signal Processing, Third Edition
Alan V. Oppenheim • Ronald W. Schafer

سیگنال گفتار 32 ms

Figure 2.2 (a) Segment of a continuous-time speech signal $x_a(t)$. (b) Sequence of samples $x[n] = x_a(nT)$ obtained from the signal in part (a) with $T = 125\ \mu s$.



زمان پیوسته $x_a(t)$

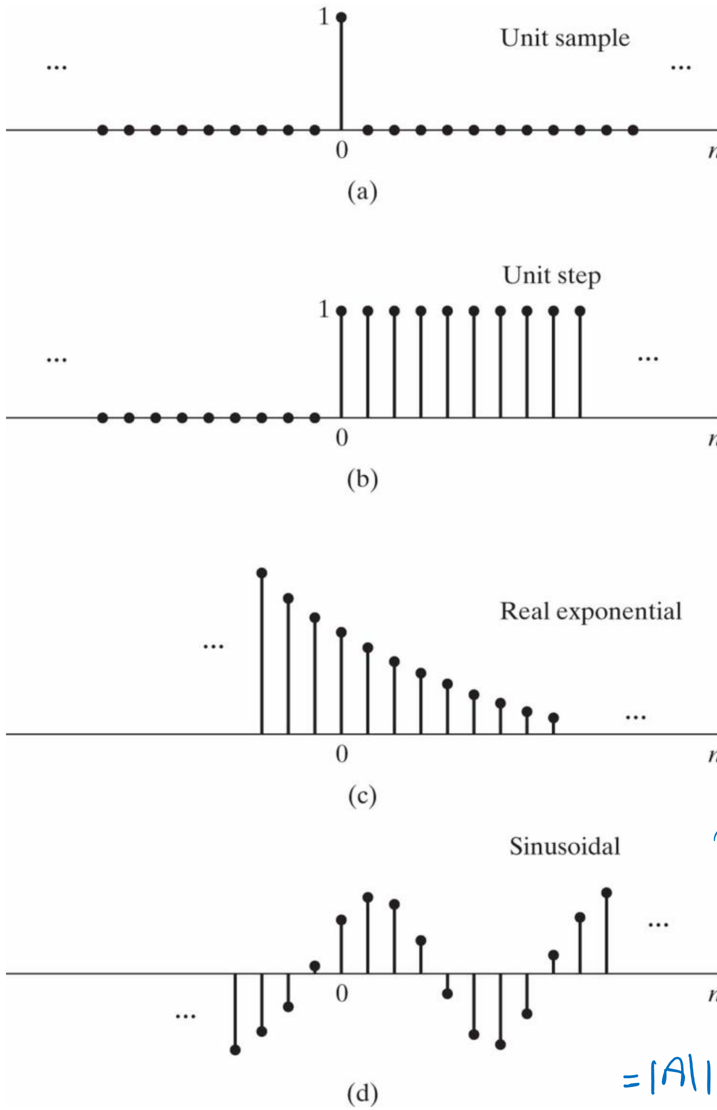
تعداد نمونه‌ها $= \dfrac{32\ ms}{T = 125\ \mu s} = 256$ samples

زمان گسسته $x[n] = x_a(nT)$

Figure 2.3 Some basic sequences. The sequences shown play important roles in the analysis and representation of discrete-time signals and systems.

$\delta[n] = u[n] - u[n-1]$

ضربه واحد $\delta[n] = \begin{cases} 1 ; & n = 0 \\ 0 ; & n \neq 0 \end{cases}$



$u[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k]$

$u[n] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[n-k]$

پله واحد $u[n] = \begin{cases} 1 ; & n \geq 0 \\ 0 ; & n < 0 \end{cases}$

رابطه کلی نمایی : $x[n] = A\alpha^n$

$\rightarrow$ حقیقی α , A

$0 < \alpha < 1$ نزولی :

$-1 < \alpha < 0$ نزولی و با تغییر علامت :

نمایی مختلط $\Rightarrow$ مختلط α , A

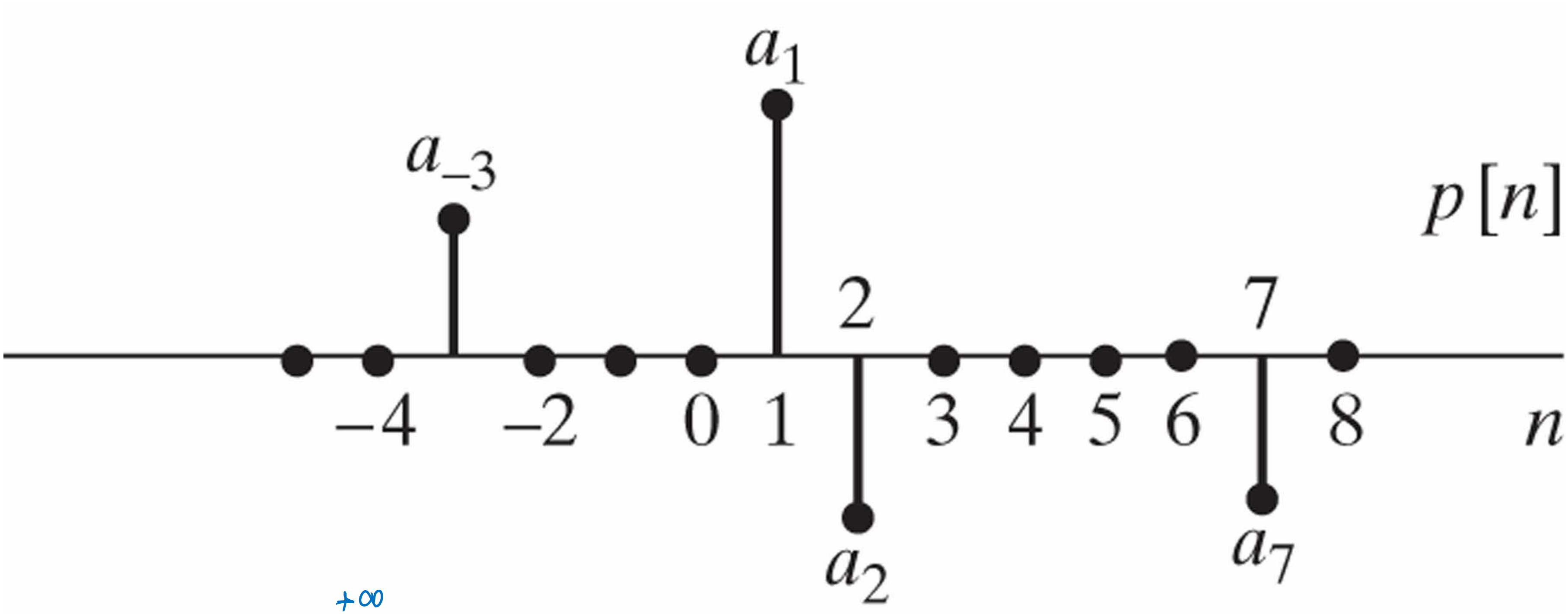
$x[n] = A\alpha^n = |A| e^{j\phi} |\alpha|^n e^{j\omega_0 n}$

$= |A||\alpha|^n e^{j(\omega_0 n + \phi)}$

$= |A||\alpha|^n \cos(\omega_0 n + \phi) + j|A||\alpha|^n \sin(\omega_0 n + \phi)$

Figure 2.4 Example of a sequence to be represented as a sum of scaled, delayed impulses.

$$p[n] = a_{-3}\delta[n+3] + a_1\delta[n-1] + a_2\delta[n-2] + a_7\delta[n-7]$$



رابطه کلی : $x[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\delta[n-k]$

تفاوت‌های شکل‌های نمایی مختلط (از جمله سینوسی) در حالت زمان پیوسته و گسسته:

Figure 2.5 $\boxed{\cos \omega_0 n}$ for several different values of ω_0. As ω_0 increases from zero toward π (parts a-d), the sequence oscillates ~~more rapidly~~. As ω_0 increases from π to 2π (parts d-a), the oscillations become slower.

$x[n] = Ae^{j\omega_0 n}$

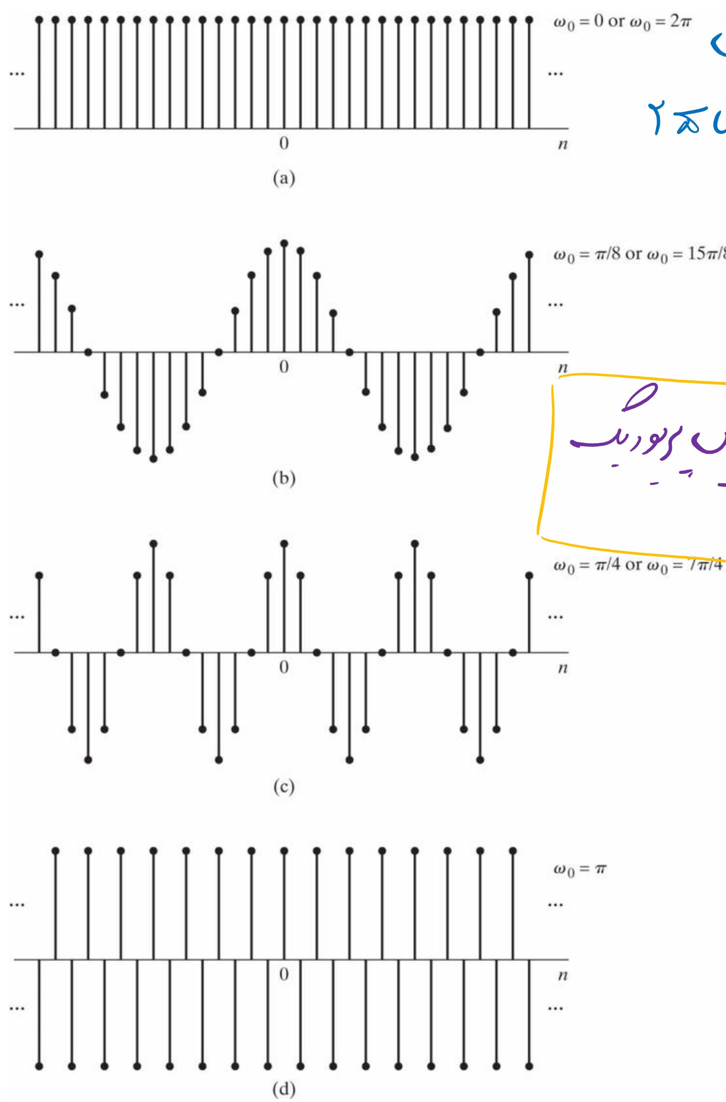
فرکانس $\omega_0 + 2\pi$ را در نظر بگیرید:

$x[n] = Ae^{j(\omega_0+2\pi)n}$

$= Ae^{j\omega_0 n}\,\cancel{e^{j2\pi n}}$ 1

$= Ae^{j\omega_0 n}$

$(\omega_0 + 2\pi r)$



۱- تغییرات شکل با افزایش فرکانس از ۰ تا π زیاد می‌شود و پس از π تا ۲π کاهش می‌یابد و این روند به طور متناوب تکرار می‌شود.

شکل‌های زمان گسسته در حوزه فرکانس پریودیک نسبت به ω هستند.

تفاوت دوم بین سیگنال cos زمان پیوسته و گسسته:

تعریف پریودیک بودن: $x[n+N]=x[n] \; ; \; \forall n$

بررسی پریودیک بودن دنباله cos زمان گسسته:

$$x[n]=A\cos(\omega_0 n+\phi)$$

$$A\cos(\omega_0(n+N)+\phi)=\cos(\omega_0 n+\phi)$$

$$A\cos(\underbrace{\omega_0 n+\phi}+\omega_0 N)=\cos(\underbrace{\omega_0 n+\phi})$$

شرط پریودیک بودن $\boxed{\omega_0 N=2\pi K}$

نتیجه: سیگنال های سینوسی زمان پیوسته همواره پریودیک اند ولی
سیگنال های سینوسی زمان گسسته تنها به شرط $\omega_0 N=2\pi k$ پریودیک اند.

مثال:

$x[n]=\cos(\frac{\pi}{4}n)$, $\omega_0=\frac{\pi}{4}$

$\frac{\pi}{4}N=2\pi k \xrightarrow{k=1} \boxed{N=8}$ پریودیک

$x[n]=\cos(\frac{n}{4})$, $\omega_0=\frac{1}{4}$

$\frac{1}{4}N=2\pi k$ غیرپریودیک ✗

رسم سیگنال زمان گسسته در MATLAB

```
n=-20:20;
x=cos(pi/8*n);
stem(n,x)
```

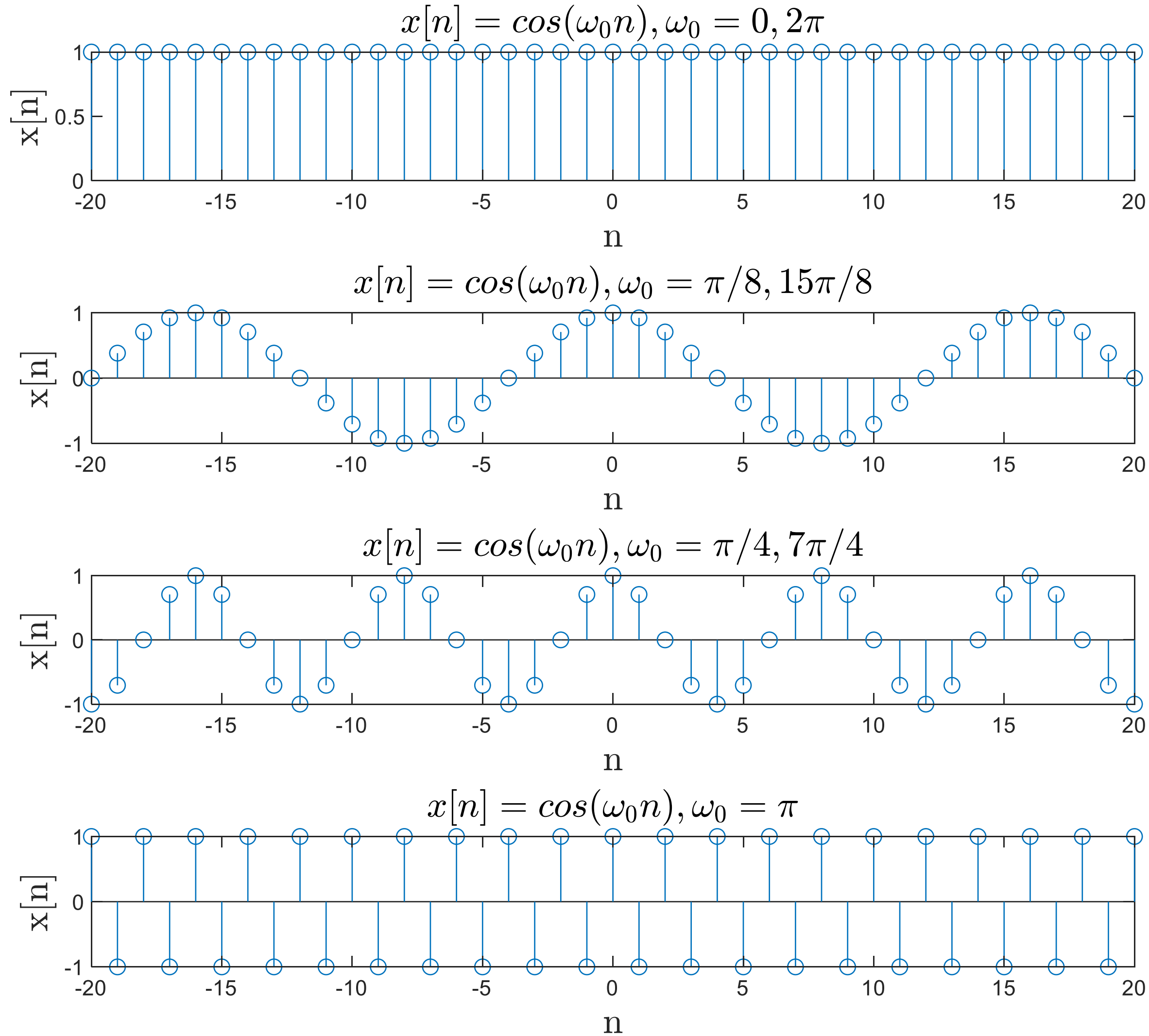


Figure 2.6 Representation of a discrete-time system, i.e., a transformation that maps an input sequence $x[n]$ into a unique output sequence $y[n]$.

۲- سیستم های زمان گسسته

$y[n] = T\{x[n]\}$

خروجی

ورودی

مثال: $y[n] = x[n-n_d]$

delay

$-\infty < n < \infty$

n_d عدد صحیح

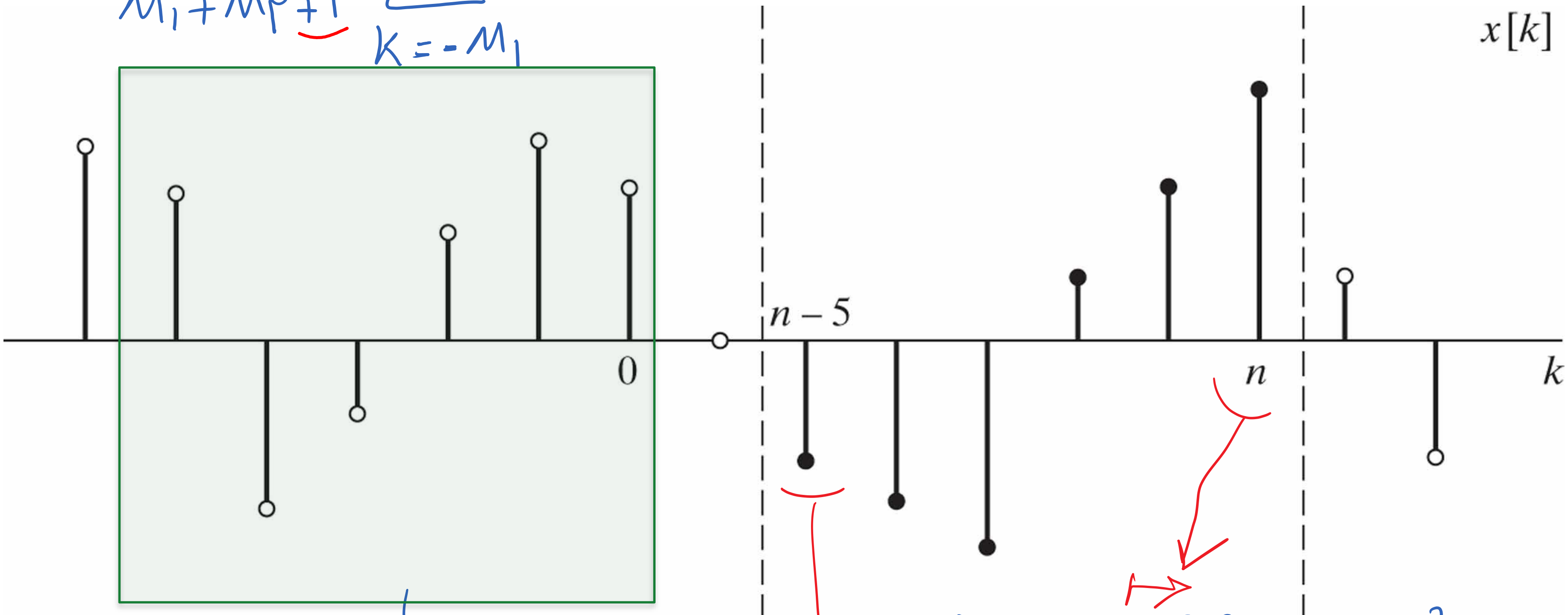
مثال: سیستم تأخیر ایده آل

Figure 2.7 Sequence values involved in computing a moving average with $\boxed{M_1 = 0 \text{ and } M_2 = 5}$.

$$y[n] = \frac{1}{6}\sum_{k=0}^{5} x[n-k]$$

مثال ۲: سیستم میانگین متحرک :

$$y[n] = \frac{1}{M_1+M_2+1}\sum_{k=-M_1}^{M_2} x[n-k]$$



$$= \frac{1}{M_1+M_2+1}\Big\{x[n+M_1] + x[n+M_1-1] + \cdots + x[n] + x[n-1] + \cdots + x[n-M_2]\Big\}$$

PEARSON

Discrete-Time Signal Processing, Third Edition
Alan V. Oppenheim • Ronald W. Schafer

ویژگی های سیستم های زمان گسسته:

۲-۱-۱- سیستم های بدون حافظه: بدون حافظه $y[n] = (x[n])^2$:مثال

$\rightarrow y[n] = x[n - n_d]$ حافظه دار

Moving Average:

$$\rightarrow y[n] = \frac{1}{M_1 + M_2 + 1} \sum_{k=-M_1}^{M_2} x[n-k]$$ حافظه دار

اگر $M_1 = M_2 = 0 \rightarrow$ بدون حافظه

۲-۲: سیستم های خطی:

همگن: $T\{\alpha x[n]\} = \alpha T\{x[n]\} = \alpha y[n]$

جمع پذیر: $T\{x_1[n] + x_2[n]\} = T\{x_1[n]\} + T\{x_2[n]\} = y_1[n] + y_2[n]$

$$T\{a x_1[n] \pm b x_2[n]\} = a T\{x_1[n]\} + b T\{x_2[n]\}$$
$$= a y_1[n] + b y_2[n] \qquad \boxed{\text{خطی}}$$

superposition
جمع آثار

$$x[n] = \sum_k a_k x_k[n] \xrightarrow[\text{خطی}]{} y[n] = \sum_k a_k y_k[n]$$

مثال: سیستم انباشتگر Accumulator

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

خطی؟

$$\sum_{k=-\infty}^{n} \left(a x_1[k] + b x_2[k]\right) = a \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{n} x_1[k]}_{y_1[n]} + b \underbrace{\sum_{k=-\infty}^{n} x_2[k]}_{y_2[n]}$$

$$= a y_1[n] + b y_2[n]$$

✓ خطی

مثال:

$$w[n] = \log_{10}(|x[n]|)$$

خطی؟

نشان نقض:

جمع پذیری:

$x_1[n] = 10$

$x_2[n] = 1$

$x_3[n] = x_1[n] + x_2[n]$

$$\log_{10}(10+1) = \log_{10} 11 \overset{?}{\neq} \log_{10}(10) + \log_{10}(1) = 1$$

← غیرخطی →

۳- سیستم های تغییرناپذیر با زمان (TI) (Time-Invariant)

$$x[n] \longrightarrow y[n]$$

$$x[n-n_0] \longrightarrow y[n-n_0]$$

مثال: سیستم انباشتگر Accumulator

$$\underline{y[n]} = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

$$\boxed{k-n_0=m}$$

$k \to -\infty \Rightarrow m \to -\infty$

$k = n \Rightarrow m = n-n_0$

$$\sum_{k=-\infty}^{n} x[\underbrace{k-n_0}_{m}] = \sum_{m=-\infty}^{n-n_0} x[m] = y[n-n_0]$$

$k-n_0=m$

✓ TI

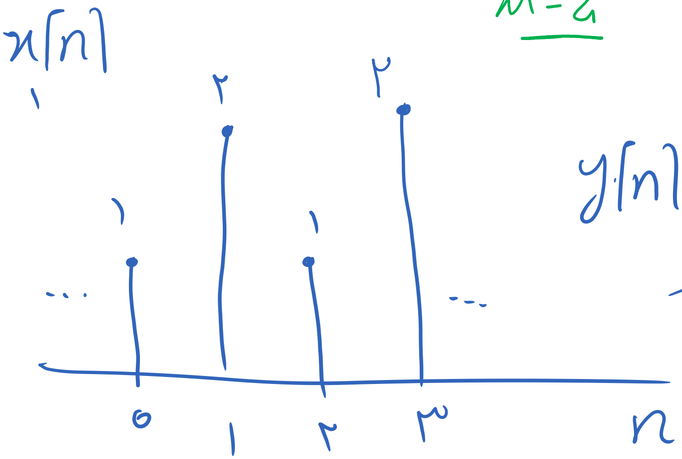
مثال: سیستم فشرده ساز Compressor

کاربرد در فصل ۴

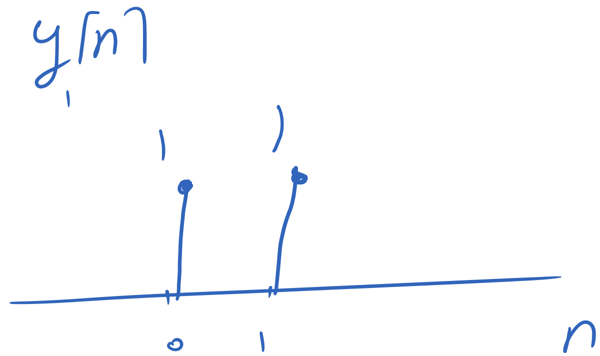
$$y[n]=x[Mn] \qquad -\infty<n<\infty$$

M: صحیح و مثبت

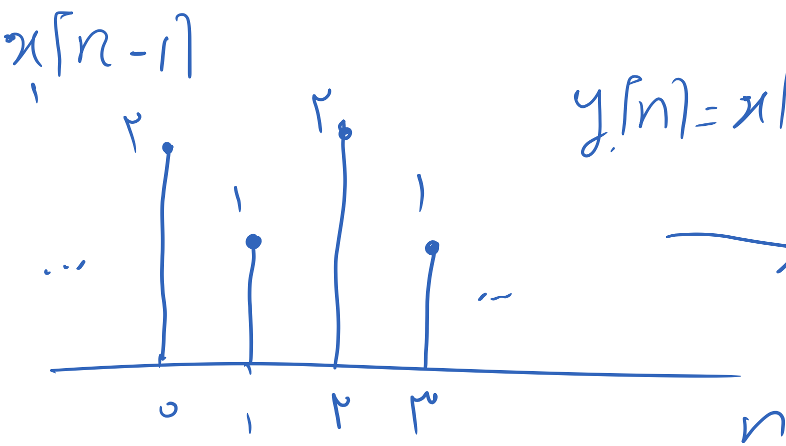
$M=2$



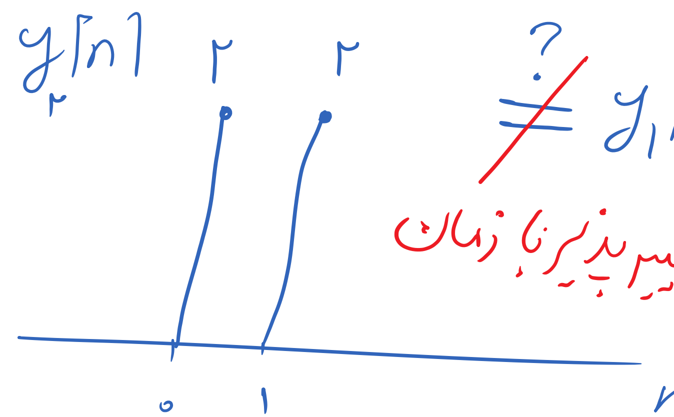
$$y[n]=x[2n] \longrightarrow$$



مثال نقض:



$$y[n]=x[2n] \longrightarrow$$



$$\cancel{\overset{?}{=}}\; y_1[n-1]$$

تغییر پذیر با زمان

۲-۴-۲ علی بودن: Causality

- خروجی در نقطه $n=n_0$ فقط به ورودی در نقطات $n\leq n_0$ بستگی داشته باشد.

- سیستمی که به آینده وابسته نباشد: غیرپیشگو

مثال: سیستم تأخیر ایده‌آل: $y[n]=x[n-n_d]$

$$\begin{cases} \text{علی}: & n_d\geq 0 \\ \text{غیرعلی}: & n_d<0 \end{cases}$$

Moving Average: سیستم میانگین متحرک:

$$\rightarrow y[n]=\frac{1}{M_1+M_2+1}\sum_{k=-M_1}^{M_2}x[n-k]$$

$$\begin{cases} -M_1\geq 0\ ,\ M_2\geq 0: & \text{علی} \\ o.w.: & \text{غیرعلی} \end{cases}$$

$y[n]=x[Mn]$

M صحیح و مثبت

$n=1\ ;\ M=2$

$y[\underline{1}]=x[\underline{2}]$

غیرعلی

۲-۵- پایداری Stability

BIBO

ورودی کراندار، خروجی کراندار $x[n]$

می‌تواند $n \to \infty$

$$|x[n]| \leq B_x < \infty \quad \forall n$$

$$|y[n]| \leq B_y < \infty \quad \forall n$$

مثال: سیستم انباشتگر:

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

$$x[n] = u[n]$$

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} u[k] = \sum_{k=0}^{n} u[k] = \begin{cases} 0 & ; n < 0 \\ n+1 & ; n \geq 0 \end{cases}$$

unstable ناپایدار

$$n \to \infty \Rightarrow y[n] \to \infty$$

۳- سیستم های LTI :

LTI: Linear, Time-Invariant

ورودی خروجی سیستم $\quad y[n] = T\{x[n]\}$

h : پاسخ ضربه

$$= T\left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\delta[n-k] \right\}$$

از خطی بودن $\quad = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, T\{\delta[n-k]\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h_k[n]$

از تغییرناپذیری با زمان $\quad = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\, h[n-k]$

کانولوشن

پیچش

$$y[n] = x[n] * h[n]$$

PEARSON

Discrete-Time Signal Processing, Third Edition
Alan V. Oppenheim • Ronald W. Schafer

Figure 2.8 Representation of the output of an LTI system as the superposition of responses to individual samples of the input.

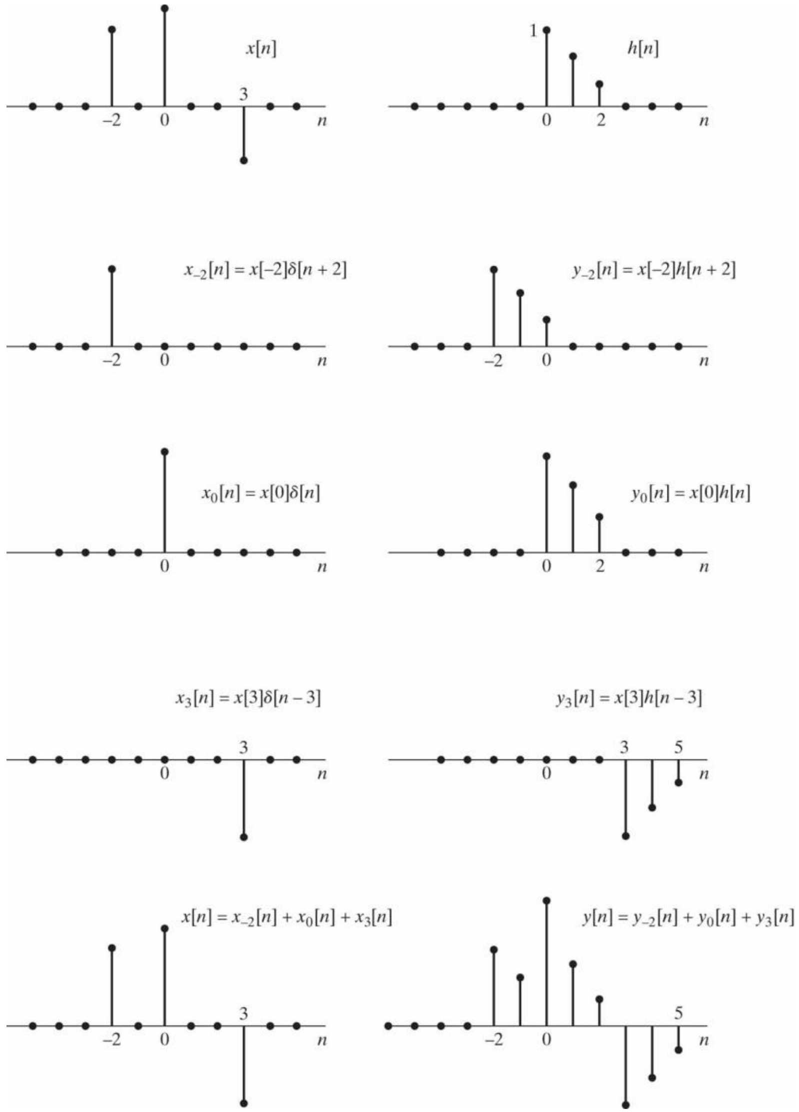


Figure 2.9 Forming the sequence $h[n-k]$. (a) The sequence $h[k]$ as a function of k. (b) The sequence $h[-k]$ as a function of k. (c) The sequence $h[n-k] = h[-(k-n)]$ as a function of k for $n = 4$.

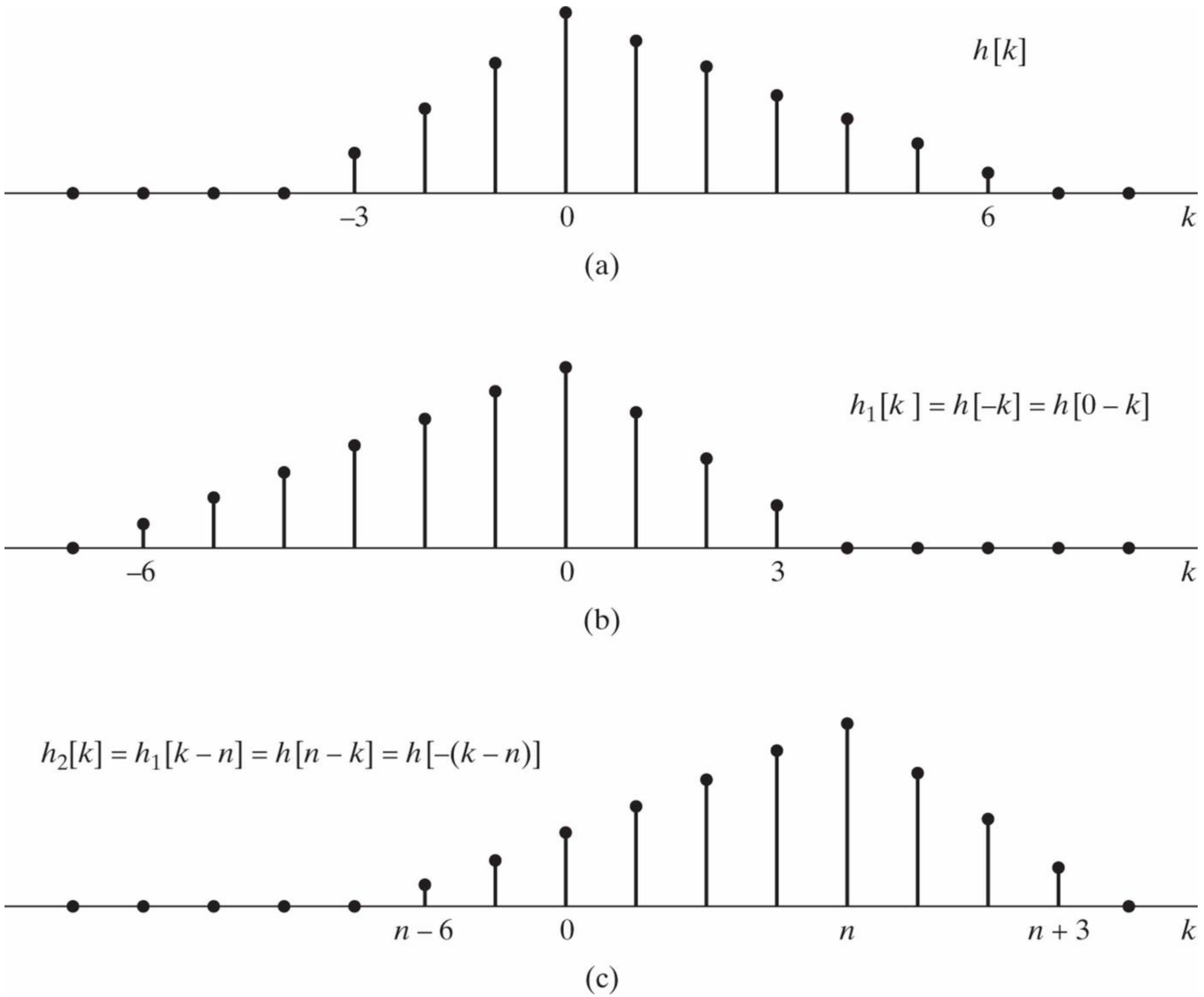


Figure 2.10 Sequence involved in computing a discrete convolution. (a)–(c) The sequences $x[k]$ and $h[n-k]$ as a function of k for different values of n. (Only nonzero samples are shown.) (d) Corresponding output sequence as a function of n.

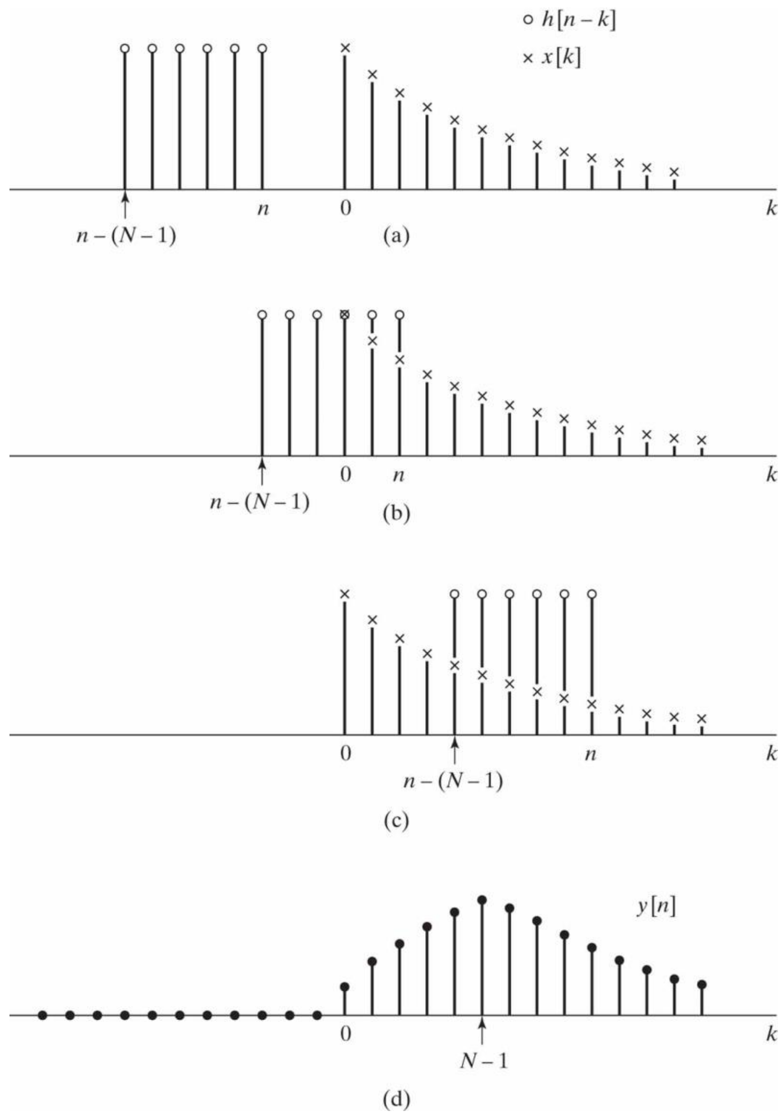
مثال:

$$h[n] = u[n] - u[n-N] = \begin{cases} 1 & ; \; 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 & ; \; \text{o.w.} \end{cases}$$

$$x[n] = \begin{cases} a^n & ; \; n \geq 0 \\ 0 & ; \; n < 0 \end{cases}$$

$$x[n] = a^n u[n]$$

۱۱ مثال



۴ـ ویژگی‌های سیستم‌های LTI :

جابه‌جایی‌پذیری :

$$x[n]*h[n]=h[n]*x[n]$$

توزیع‌پذیری نسبت به جمع :

$$x[n]*(h_1[n]+h_2[n]) = x[n]*h_1[n]+x[n]*h_2[n]$$

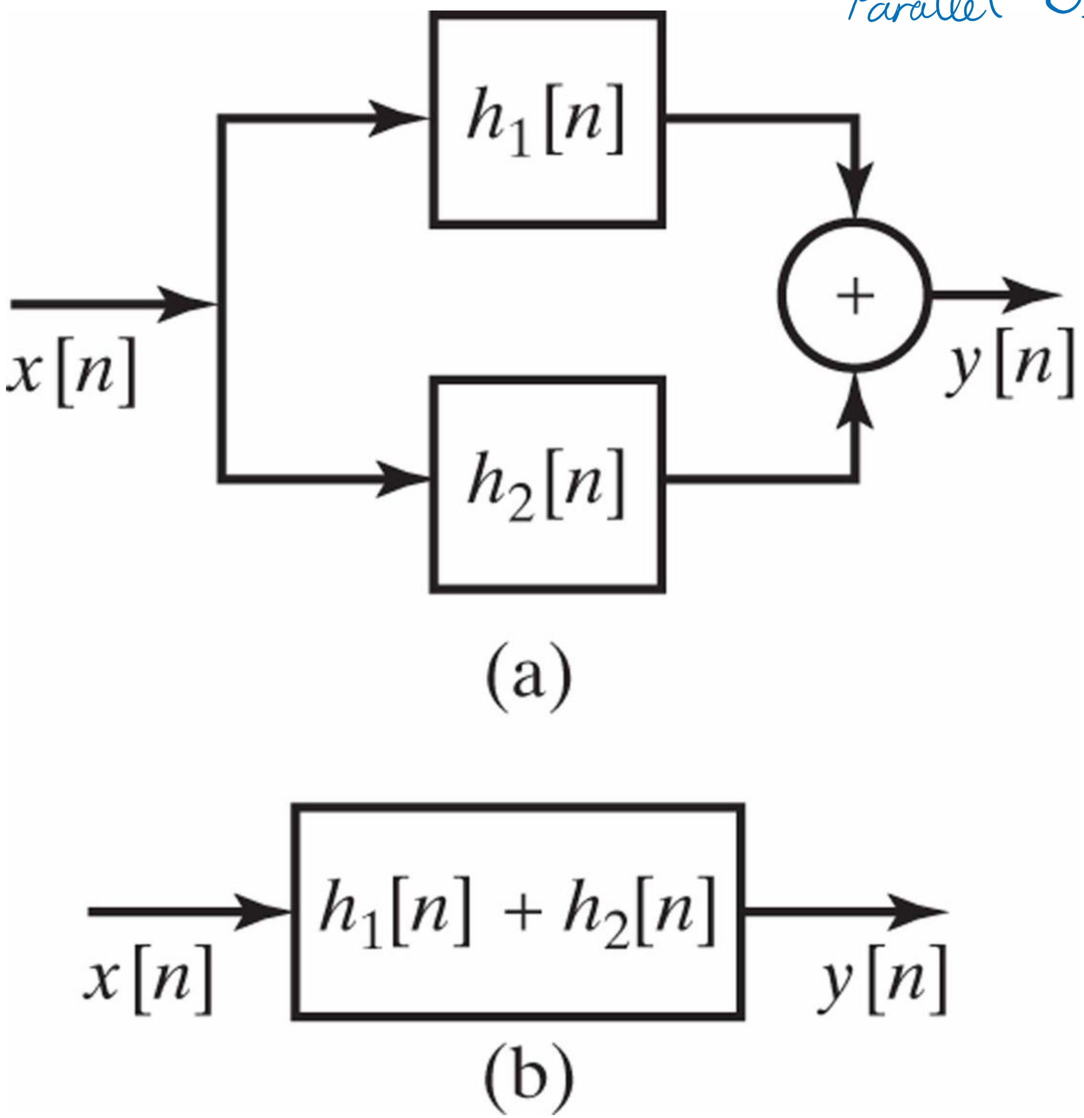
انجمنی :

$$(x[n]*h_1[n])*h_2[n] = x[n]*(h_1[n]*h_2[n])$$

$$=(x[n]*h_2[n])*h_1[n]$$

Figure 2.11 (a) Parallel combination of LTI systems. (b) An equivalent system.

Parallel سیستم‌های موازی

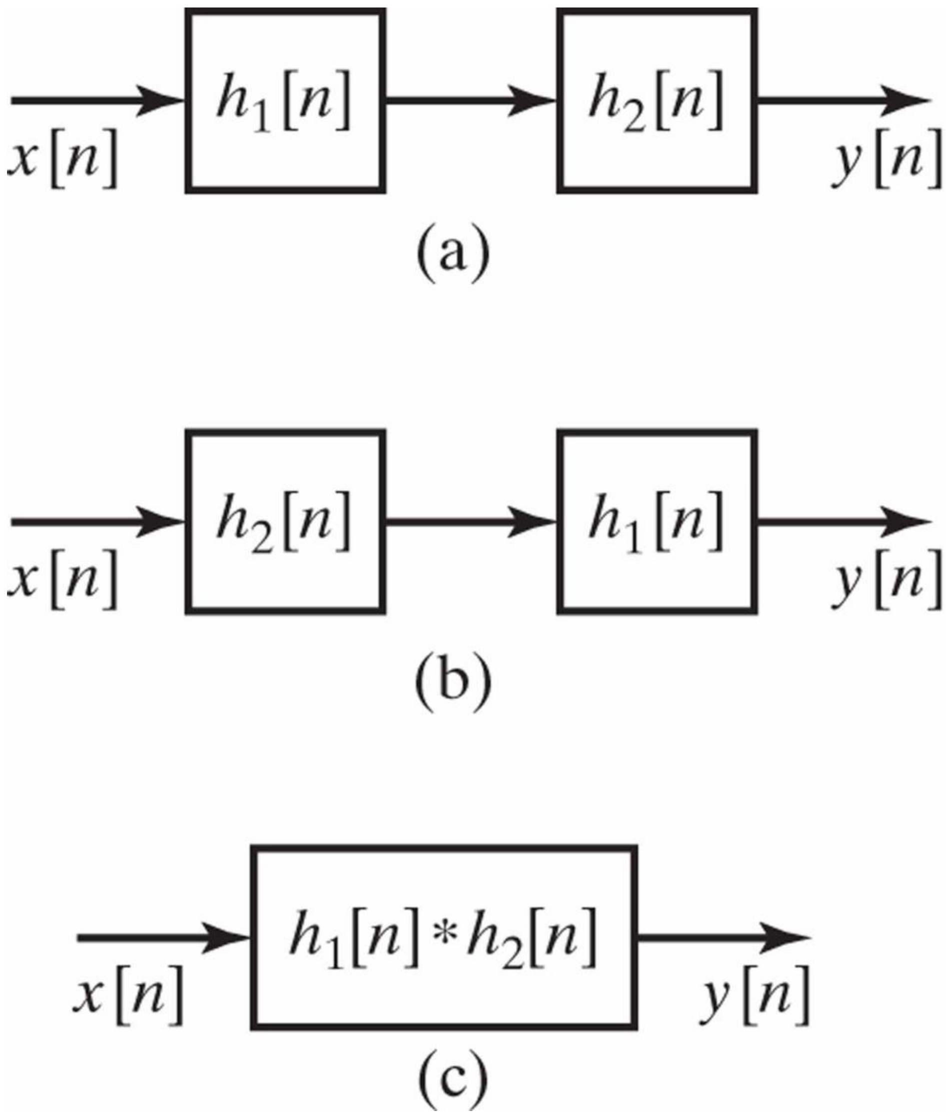


سیستم های آبشاری، سری cascade

Figure 2.12 (a) Cascade combination of two LTI systems. (b) Equivalent cascade. (c) Single equivalent system.

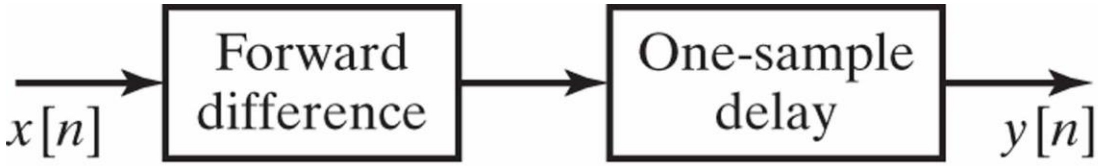
اگر سیستم ها LTI باشند:

دو سیستم سری قابل جابجا شدن



معادل سیستم زیر را به دست آورید :

Figure 2.13 Equivalent systems found by using the commutative property of convolution.



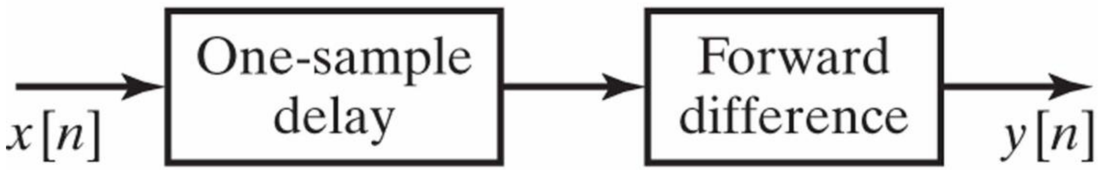
$y[n] = x[n+1] - x[n]$

$h_1[n] = \delta[n+1] - \delta[n]$

(a)

$y[n] = x[n-1]$

$h_2[n] = \delta[n-1]$



(b)

$$h[n] = h_1[n] * h_2[n] = (\delta[n+1] - \delta[n]) * \delta[n-1] = \delta[n] - \delta[n-1]$$

$y[n] = x[n] - x[n-1]$

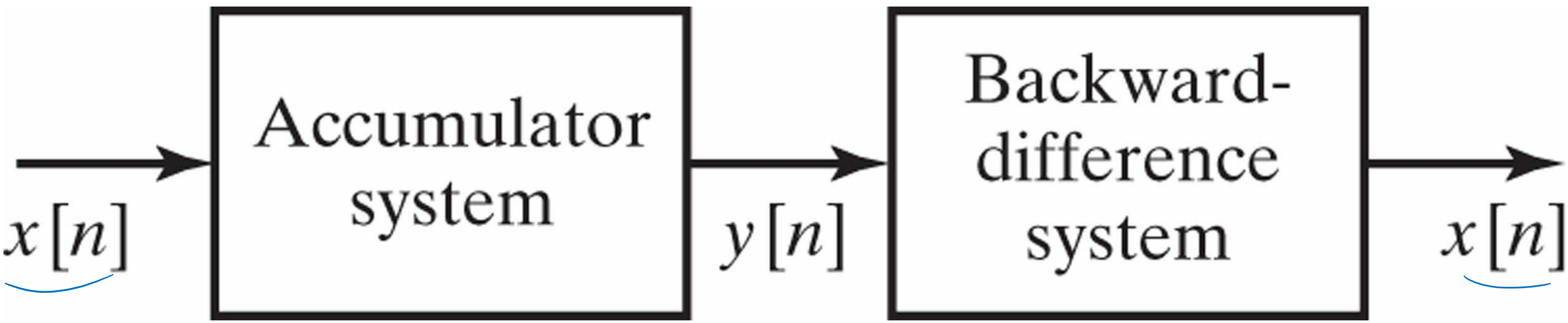
(c)

Figure 2.14 An accumulator in cascade with a backward difference. Since the backward difference is the inverse system for the accumulator, the cascade combination is equivalent to the identity system.

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} x[k] \rightarrow h[n] = \sum_{k=-\infty}^{n} \delta[k] = u[n]$$

مثال : معادل سیستم زیر را بدست آورید :

$h_1[n] = u[n]$ $\qquad$ $h_2[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$



$$h[n] = h_1[n] * h_2[n] = u[n] * (\delta[n] - \delta[n-1])$$
$$= u[n] - u[n-1]$$
$$= \delta[n]$$

همانی

$$x[n] \rightarrow \boxed{\delta[n]} \rightarrow x[n]$$

۵ - معادلات تفاضلی خطی با ضرایب ثابت :

(LCCDE)

Figure 2.15 Block diagram of a recursive difference equation representing an accumulator.

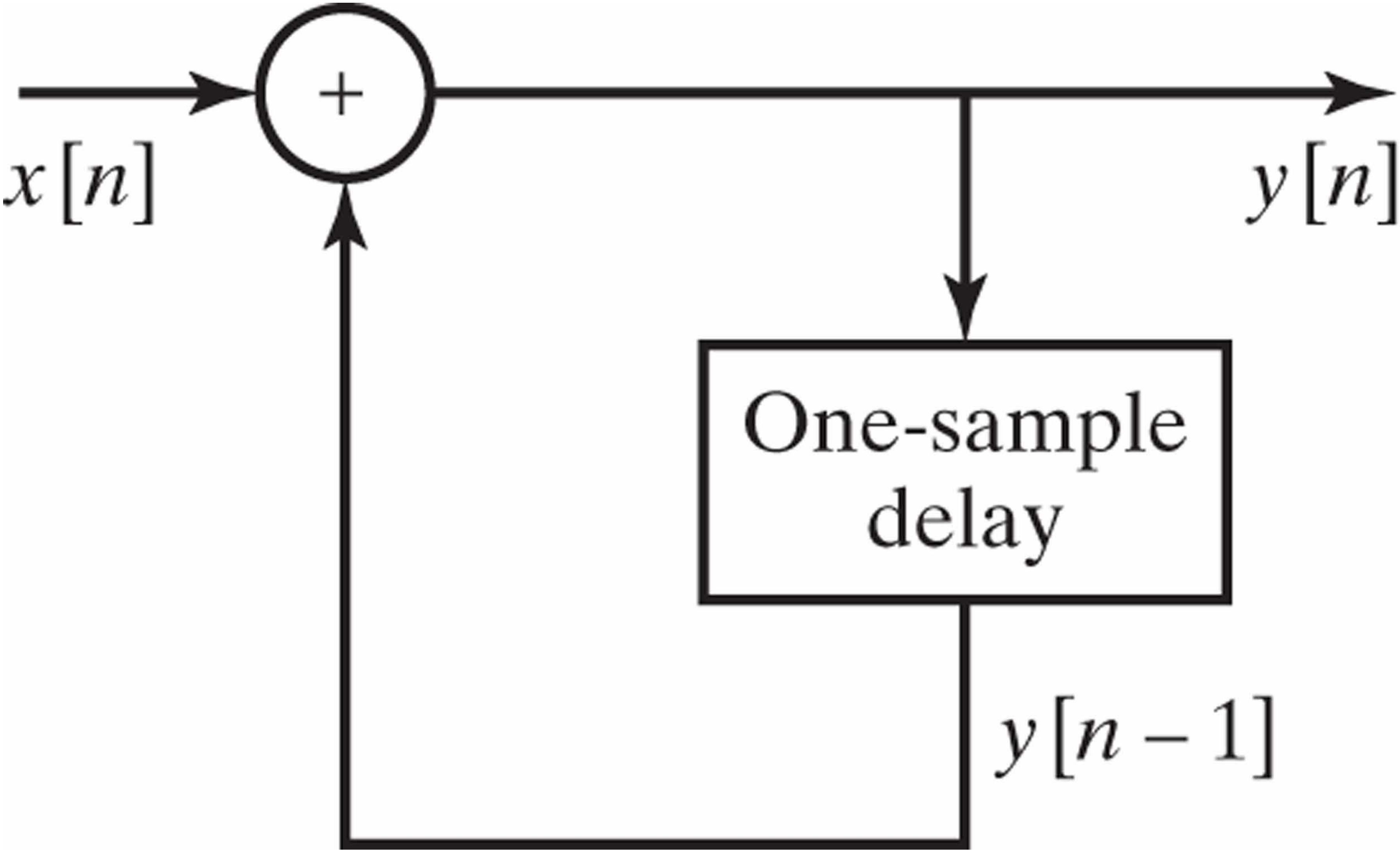
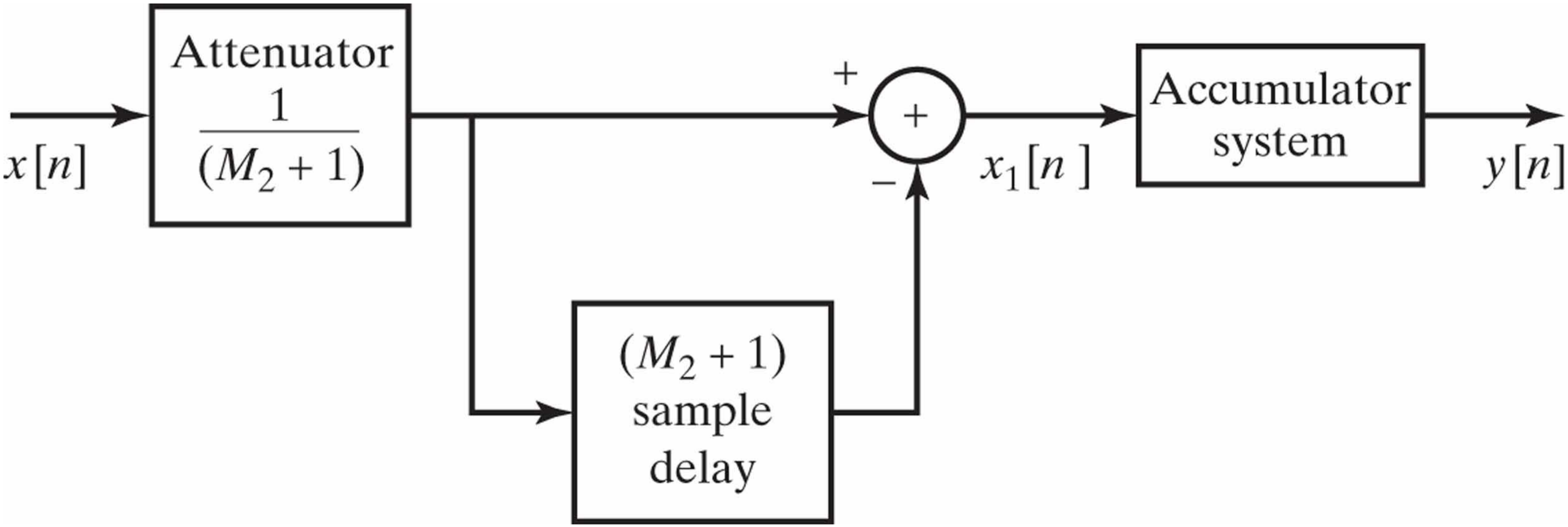


Figure 2.16 Block diagram of the recursive form of a moving-average system.



به نام خدا

ادامهٔ فصل دوم: ۲ـ نمایش حوزهٔ فرکانس سیگنال‌ها و سیستم‌های زمان گسسته:

۲ـ۱: توابع ویژه سیستم‌های LTI:

$$x[n]=e^{j\omega n} \;;\; -\infty<n<\infty$$

کانولوشن
$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,h[n-k]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\,x[n-k]$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\,e^{j\omega(n-k)}=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\,e^{j\omega n}e^{-j\omega k}$$

$$=e^{j\omega n}\underbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} h[k]\,e^{-j\omega k}}_{H(e^{j\omega})}$$

$$\Rightarrow y[n]=\underbrace{H(e^{j\omega})}_{\text{پاسخ فرکانسی سیستم LTI}}\,e^{j\omega n}$$

کارتزین $H(e^{j\omega}) = H_R(e^{j\omega}) + jH_I(e^{j\omega})$ قسمت حقیقی و موهومی

قطبی $H(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})| e^{j\measuredangle H(e^{j\omega})}$ اندازه و فاز

مثال: $y[n] = x[n-n_d]$ تاخیر ساده

$$x[n] = e^{j\omega n} \longrightarrow y[n] = e^{j\omega(n-n_d)} = \underbrace{e^{-j\omega n_d}}_{H(e^{j\omega})} e^{j\omega n}$$

$$\Rightarrow H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d}$$

$$\longrightarrow H(e^{j\omega}) = \cos(\omega n_d) - j\sin(\omega n_d)$$

$$\longrightarrow \begin{cases} H_R(e^{j\omega}) = \cos(\omega n_d) \\ H_I(e^{j\omega}) = -\sin(\omega n_d) \end{cases}$$

$$\longrightarrow |H(e^{j\omega})| = 1 \quad ; \quad \measuredangle H(e^{j\omega}) = -\omega n_d$$

مثال: پاسخ سینوسی سیستم LTI:

$$\boxed{x[n] = A\cos(\omega_0 n + \varphi)} = \frac{A}{2} e^{j\varphi} e^{j\omega_0 n} + \frac{A}{2} e^{-j\varphi} e^{-j\omega_0 n}$$

$$\rightarrow y_1[n] = H(e^{j\omega_0}) \frac{A}{2} e^{j\varphi} e^{j\omega_0 n}$$

$$\rightarrow y_2[n] = H(e^{-j\omega_0}) \frac{A}{2} e^{-j\varphi} e^{-j\omega_0 n}$$

$$z + z^* = 2\mathrm{Re}[z]$$

$$\rightarrow y[n] = \frac{A}{2}\left[H(e^{j\omega_0}) e^{j\varphi} e^{j\omega_0 n} + H(e^{-j\omega_0}) e^{-j\varphi} e^{-j\omega_0 n}\right]$$

اگر $h[n]$ حقیقی باشد $\leftarrow$ $H(e^{-j\omega_0}) = H^*(e^{j\omega_0})$

$$\boxed{y[n] = A\,|H(e^{j\omega_0})| \cos(\omega_0 n + \varphi + \theta)}$$

$$\theta = \measuredangle H(e^{j\omega_0})$$

مثال: سیستم تاخیر ایده‌آل:

$$y[n] = A\cos(\omega_0 n + \varphi - \omega_0 n_d)$$

$$= A\cos(\omega_0 (n - n_d) + \varphi)$$

نکته: پاسخ فرکانسی سیستم‌های زمان گسسته LTI نسبت به ω با پریود 2π، پریودیک است.

$$H(e^{j\omega}) \longrightarrow H(e^{j(\omega+2\pi)}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]\, e^{-j(\omega+2\pi)n}$$

$$e^{-j2\pi n} = 1 \longrightarrow = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]\, e^{-j\omega n} = H(e^{j\omega}) \checkmark \text{ پریودیک}$$

برای نمایش پاسخ فرکانسی $H(e^{j\omega})$ با توجه به پریودیک بودن آن می‌توان تنها بازه $0 \le \omega \le 2\pi$ و

$\boxed{-\pi \le \omega \le \pi}$ برای پاسخ‌های متقارن

را نمایش می‌دهد.

ایده‌آل

Figure 2.17 Ideal lowpass filter showing (a) periodicity of the frequency response and (b) one period of the periodic frequency response.

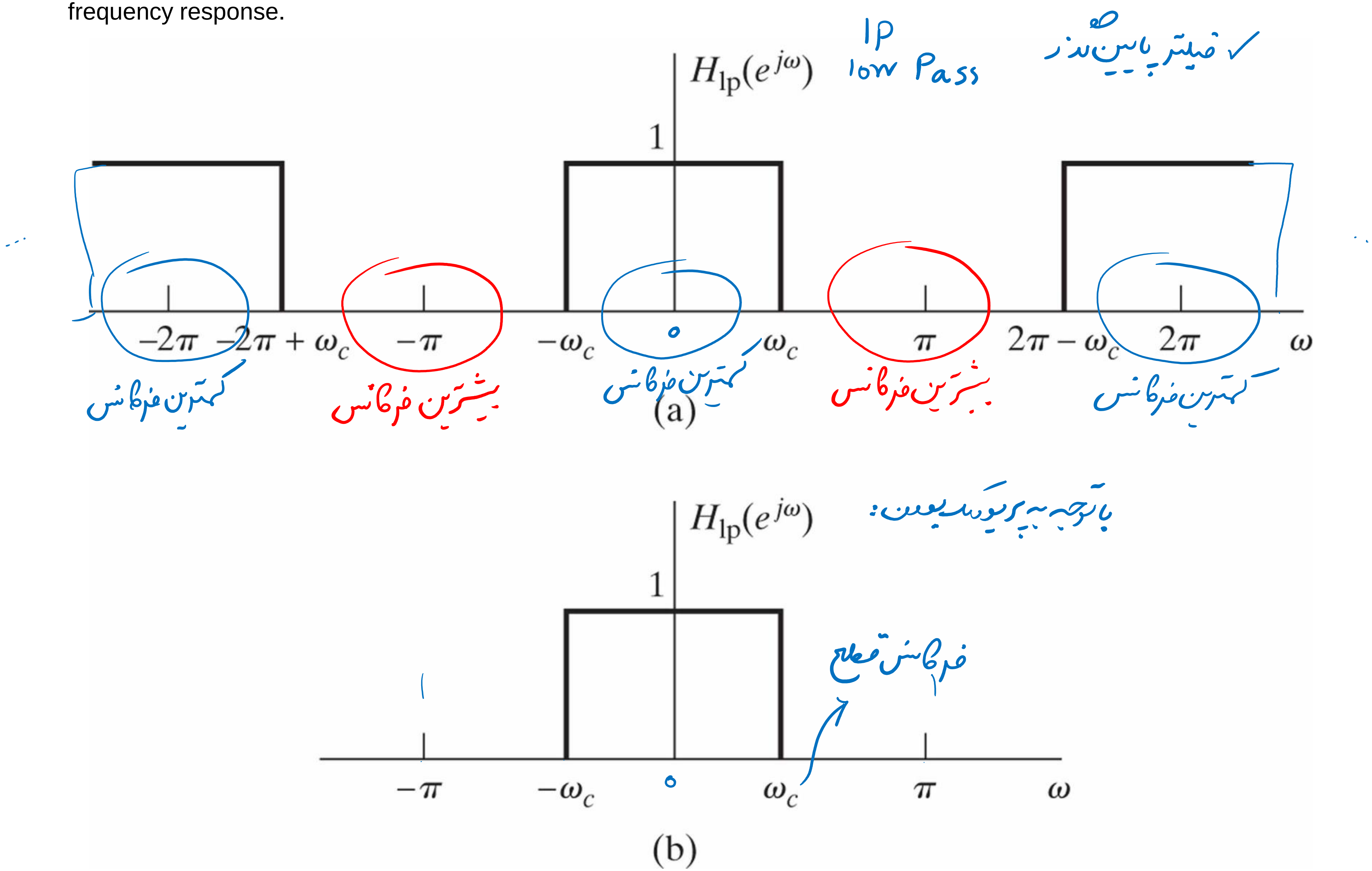
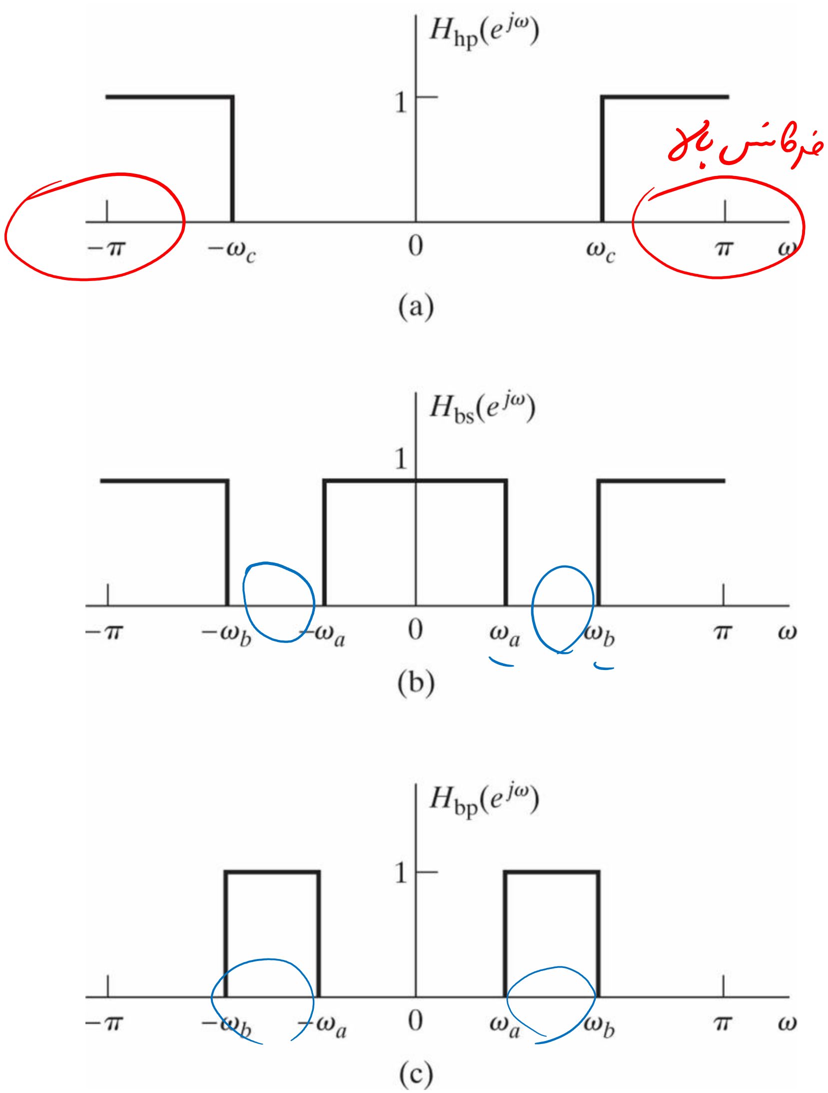


Figure 2.18 Ideal frequency-selective filters. (a) Highpass filter. (b) Bandstop filter. (c) Bandpass filter. In each case, the frequency response is periodic with period 2π. Only one period is shown.



hp فیلتر بالاگذر ✓
high pass

bs فیلتر میان نگذر ✓
band stop

bp فیلتر میان‌گذر ✓
band pass

مثال: سیستم میانگین متحرک : (MA)

پاسخ فرکانسی: ؟

$$h[n] = \begin{cases} \dfrac{1}{M_1+M_2+1} & ; \ -M_1 \leq n \leq M_2 \\ 0 & ; \ o.w. \end{cases}$$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{1}{M_1+M_2+1} \sum_{n=-M_1}^{M_2} e^{-j\omega n} \xrightarrow[M_1=0]{\text{حالت خاص}} H(e^{j\omega}) = \frac{1}{M_2+1} \sum_{n=0}^{M_2} e^{-j\omega n}$$

$$\longrightarrow H(e^{j\omega}) = \frac{1}{M_2+1} \left(\frac{1-e^{-j\omega(M_2+1)}}{1-e^{-j\omega}} \right)$$

$$= \frac{1}{M_2+1} \frac{\left(e^{j\omega(\frac{M_2+1}{2})} - e^{-j\omega(\frac{M_2+1}{2})}\right) e^{-j\omega(\frac{M_2+1}{2})}}{\left(e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}\right) e^{-j\omega/2}}$$

$$-1 = e^{j\pi}$$

$M_1 = 0$

MA :

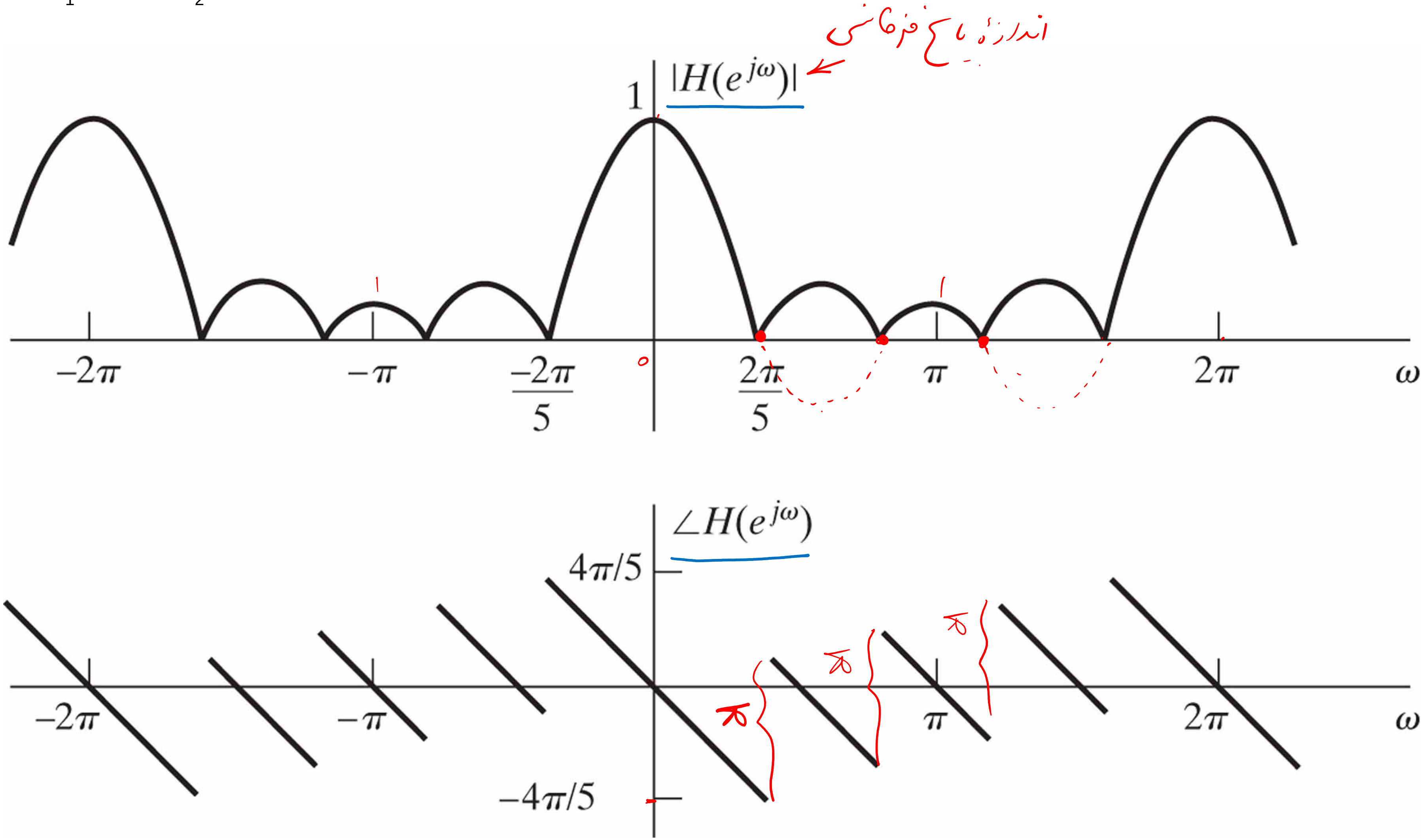
$$\boxed{H(e^{j\omega}) = \underbrace{\left| \frac{1}{M_2+1} \frac{\sin[\omega(\frac{M_2+1}{2})]}{\sin(\frac{\omega}{2})} \right|}_{|H(e^{j\omega})|} \underbrace{e^{-j\omega \frac{M_2}{2}}}_{}}$$

$$\measuredangle H(e^{j\omega}) \quad -\omega \frac{M_2}{2}$$

(رابطه 124)

حالت $M_1 = M_2$ بررسی شود

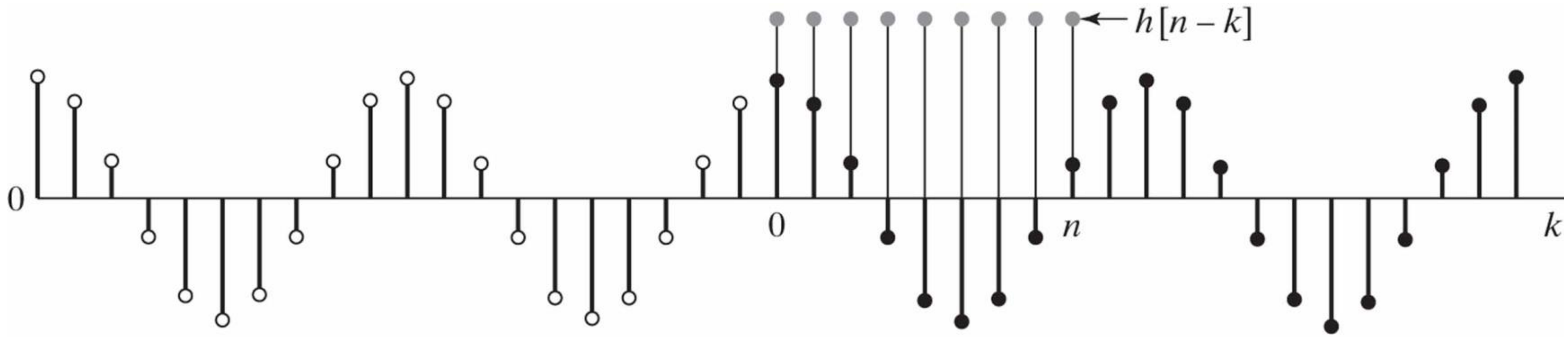
Figure 2.19 (a) Magnitude and (b) phase of the frequency response of the moving-average system for the case $M_1 = 0$ and $M_2 = 4$.



transient پاسخ گذرا
steady state ← حالت دائم

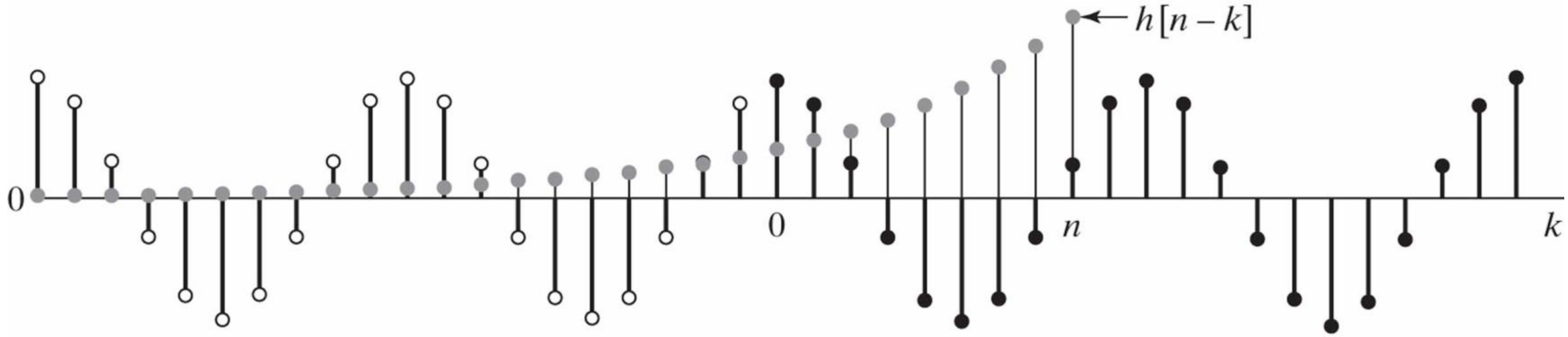
← ورودی های نمایی مختلط که به طور ناگهانی اعمال شده اند:

Figure 2.20 Illustration of a real part of suddenly applied complex exponential input with (a) FIR and (b) IIR.



(a)

نکته: شرط کافی برای اینکه پاسخ گذرا به سمت صفر میل کند (میرا شود) پایداری سیستم است.



(b)

۷ - نمایش دنباله ها با استفاده از تبدیل فوریه :

زوج تبدیل فوریه

$$\begin{cases} x[n] = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})e^{j\omega n}\,d\omega \\ \underbrace{X(e^{j\omega})}_{\text{تبدیل فوریه } x[n]} = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]e^{-j\omega n} \end{cases}$$

دکارتی ← $X(e^{j\omega}) = X_R(e^{j\omega}) + jX_I(e^{j\omega})$

قطبی ← $X(e^{j\omega}) = |X(e^{j\omega})|\, e^{j\measuredangle X(e^{j\omega})}$

پاسخ فرکانسی سیستم $H(e^{j\omega}) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n]e^{-j\omega n}$ ← پاسخ ضربه

شرط تبدیل فوریه :

شرط کافی ← مطلقاً جمع پذیری

$$\rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]| < \infty$$

مثال :

$$\boxed{x[n] = a^n u[n]}$$

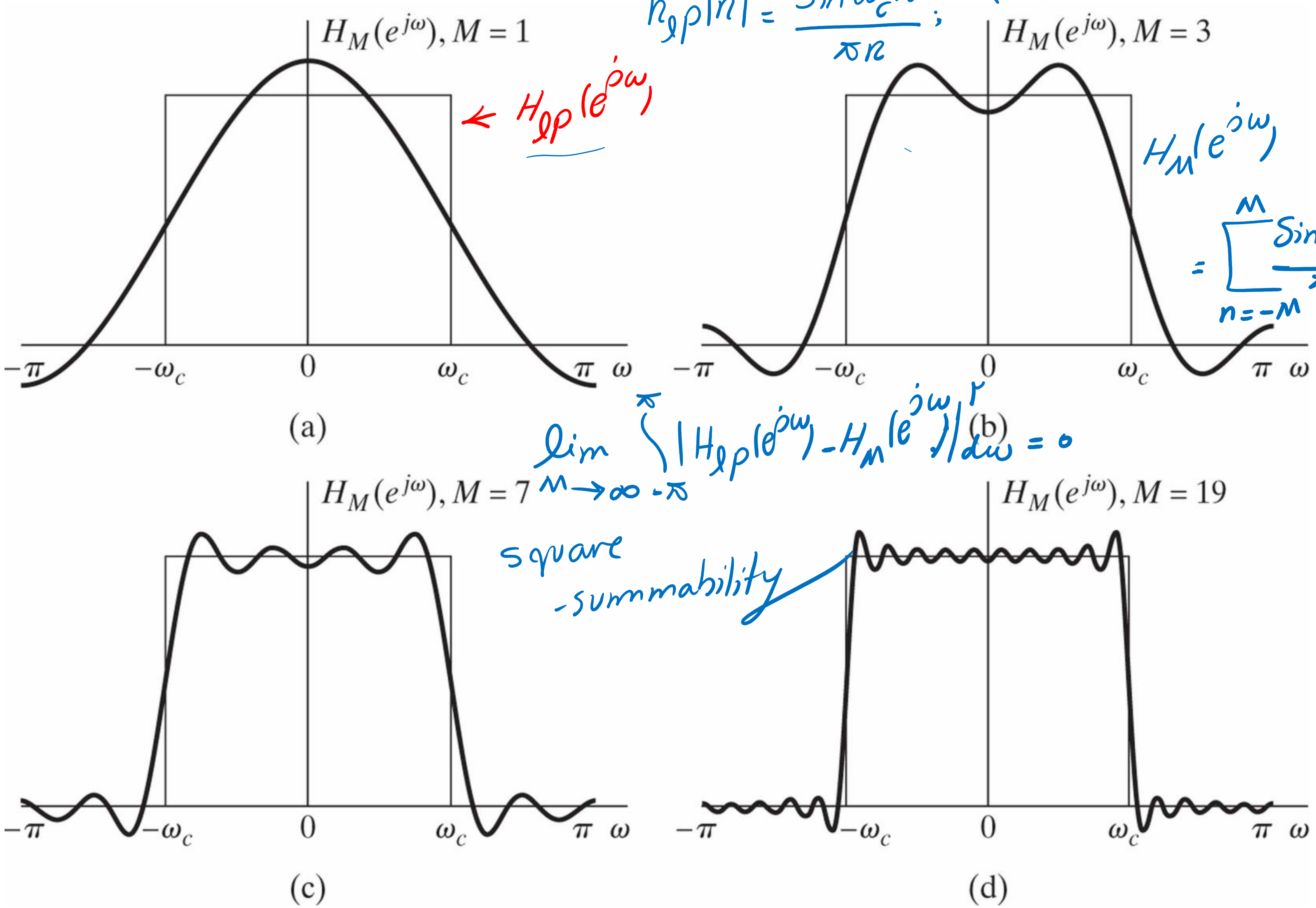
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n$$

$$|ae^{-j\omega}| < 1 \longrightarrow \boxed{|a| < 1}$$

$$\boxed{X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}}$$

Figure 2.21 Convergence of the Fourier transform. The oscillatory behavior at $\omega = \omega_c$ is often called the Gibbs phenomenon.



$h_{lp}[n] = \dfrac{\sin \omega_c n}{\pi n}; \ -\infty < n < \infty$

$H_{lp}(e^{j\omega})$

$H_M(e^{j\omega}) = \sum_{n=-M}^{M} \dfrac{\sin \omega_c n}{\pi n} e^{-j\omega n}$

$\lim_{M \to \infty} \int_{-\pi}^{\pi} |H_{lp}(e^{j\omega}) - H_M(e^{j\omega})|^2 d\omega = 0$

square-summability

تبدیل فوریه سیگنال‌هایی که هیچکدام از شرط‌های absolute summability را ندارند:
square ″

مثال: $x[n] = 1 \quad \forall n$ ثابت

$$\rightarrow X(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2\pi\,\delta(\omega + 2\pi r)$$

$\omega = 0$

مثال:

$$\rightarrow X(e^{j\omega}) = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} 2\pi\,\delta(\omega - \omega_0 + 2\pi r)$$

$x[n] = ?$

با توجه به بازه‌ی $-\pi$ تا π
$r = 0$

$$x[n] = \frac{1}{\cancel{2\pi}} \int_{-\pi}^{\pi} \cancel{2\pi}\,\delta(\omega - \omega_0)\, e^{j\omega n}\, d\omega \Rightarrow \boxed{x[n] = e^{j\omega_0 n}}$$

مثال:

$$x[n] = u[n] \longrightarrow U(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - e^{-j\omega}} + \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \pi\,\delta(\omega + 2\pi r)$$

$$X_e(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\left[X(e^{j\omega}) + X^*(e^{-j\omega})\right]$$

$$X_o(e^{j\omega}) = \frac{1}{2}\left[X(e^{j\omega}) - X^*(e^{-j\omega})\right]$$

Table 2.1 SYMMETRY PROPERTIES OF THE FOURIER TRANSFORM

TABLE 2.1 SYMMETRY PROPERTIES OF THE FOURIER TRANSFORM

Sequence $x[n]$	Fourier Transform $X(e^{j\omega})$
1. $x^*[n]$	$X^*(e^{-j\omega})$
2. $x^*[-n]$	$X^*(e^{j\omega})$
3. $\mathcal{R}e\{x[n]\}$	$X_e(e^{j\omega})$ (conjugate-symmetric part of $X(e^{j\omega})$)
4. $j\mathcal{I}m\{x[n]\}$	$X_o(e^{j\omega})$ (conjugate-antisymmetric part of $X(e^{j\omega})$)
5. $x_e[n]$ (conjugate-symmetric part of $x[n]$)	$X_R(e^{j\omega}) = \mathcal{R}e\{X(e^{j\omega})\}$
6. $x_o[n]$ (conjugate-antisymmetric part of $x[n]$)	$jX_I(e^{j\omega}) = j\mathcal{I}m\{X(e^{j\omega})\}$
The following properties apply only when $x[n]$ is real:	
7. Any real $x[n]$	$X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$ (Fourier transform is conjugate symmetric)
8. Any real $x[n]$	$X_R(e^{j\omega}) = X_R(e^{-j\omega})$ (real part is even)
9. Any real $x[n]$	$X_I(e^{j\omega}) = -X_I(e^{-j\omega})$ (imaginary part is odd)
10. Any real $x[n]$	$\lvert X(e^{j\omega})\rvert = \lvert X(e^{-j\omega})\rvert$ (magnitude is even)
11. Any real $x[n]$	$\angle X(e^{j\omega}) = -\angle X(e^{-j\omega})$ (phase is odd)
12. $x_e[n]$ (even part of $x[n]$)	$X_R(e^{j\omega})$
13. $x_o[n]$ (odd part of $x[n]$)	$jX_I(e^{j\omega})$

Figure 2.22 Frequency response for a system with impulse response $h[n] = a^n u[n]$. (a) Real part. $a > 0$; $a = 0.75$ (solid curve) and $a = 0.5$ (dashed curve). (b) Imaginary part. (c) Magnitude. $a > 0$; $a = 0.75$ (solid curve) and $a = 0.5$ (dashed curve). (d) Phase.

مثال: $\rightarrow x[n] = a^n u[n]$

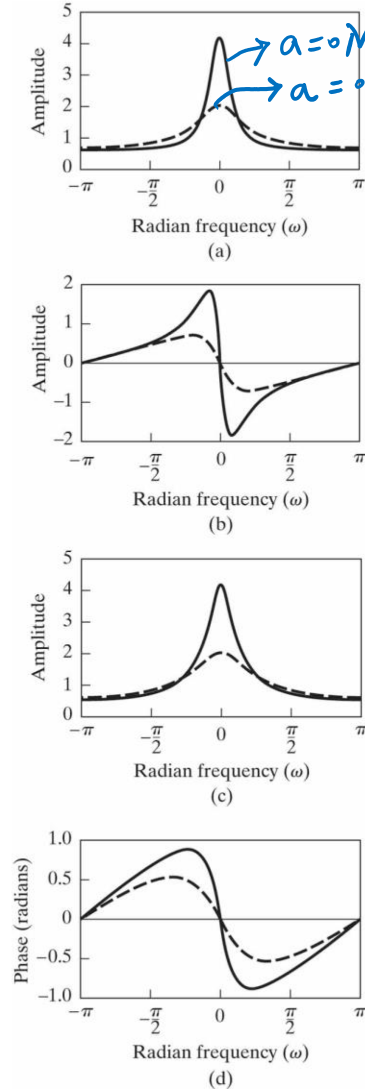
حقیقی

$X_R(e^{j\omega})$ زوج ✓

$X_I(e^{j\omega})$ فرد ✓

$|X(e^{j\omega})|$ زوج ✓

$\measuredangle X(e^{j\omega})$ فرد ✓



$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

با $|a| < 1$

ویژگی های تبدیل فوریه:

Table 2.2 FOURIER TRANSFORM THEOREMS

TABLE 2.2 FOURIER TRANSFORM THEOREMS

	Sequence	Fourier Transform
	$x[n]$	$X(e^{j\omega})$
	$y[n]$	$Y(e^{j\omega})$
خطی	1. $ax[n] + by[n]$	$aX(e^{j\omega}) + bY(e^{j\omega})$
انتقال	2. $x[n - n_d]$ (n_d an integer)	$e^{-j\omega n_d} X(e^{j\omega})$
انتقال فرکانسی	3. $e^{j\omega_0 n} x[n]$	$X(e^{j(\omega - \omega_0)})$
وارون	4. $x[-n]$	$X(e^{-j\omega})$ $X^*(e^{j\omega})$ if $x[n]$ real. → $X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$
مشتق در فرکانس	5. $nx[n]$	$j\dfrac{dX(e^{j\omega})}{d\omega}$
کانولوشن	6. $x[n] * y[n]$	ضرب $X(e^{j\omega})Y(e^{j\omega})$
ضرب	7. $x[n]y[n]$	کانولوشن پریودیک $\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y(e^{j(\omega-\theta)})d\theta$

Parseval's theorem:

ESD: energy spectral density

انرژی

$$E = \text{8. } \sum_{n=-\infty}^{\infty} |x[n]|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |X(e^{j\omega})|^2 d\omega$$

if $y[n] = x[n]$

رابطه کلی تر

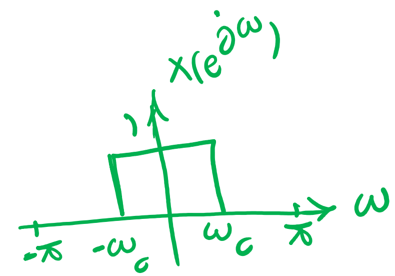
$$\text{9. } \sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\omega})Y^*(e^{j\omega})d\omega$$

Table 2.3 FOURIER TRANSFORM PAIRS

تبدیل فوریه های مهم:

TABLE 2.3 FOURIER TRANSFORM PAIRS

Sequence	Fourier Transform
1. $\delta[n]$	1
2. $\delta[n-n_0]$	$e^{-j\omega n_0}$
3. $1 \quad (-\infty < n < \infty)$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega+2\pi k)$
4. $a^n u[n] \quad (\lvert a\rvert < 1)$	$\frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$
5. $u[n]$	$\frac{1}{1-e^{-j\omega}} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \pi\delta(\omega+2\pi k)$
6. $(n+1)a^n u[n] \quad (\lvert a\rvert < 1)$	$\frac{1}{(1-ae^{-j\omega})^2}$
7. $\frac{r^n \sin\omega_p(n+1)}{\sin\omega_p} u[n] \quad (\lvert r\rvert < 1)$	$\frac{1}{1-2r\cos\omega_p e^{-j\omega}+r^2e^{-j2\omega}}$
8. $\frac{\sin\omega_c n}{\pi n}$	$X(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1, & \lvert\omega\rvert < \omega_c, \\ 0, & \omega_c < \lvert\omega\rvert \le \pi \end{cases}$
9. $x[n] = \begin{cases} 1, & 0 \le n \le M \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$ (دنباله محدود)	$\frac{\sin[\omega(M+1)/2]}{\sin(\omega/2)} e^{-j\omega M/2}$
10. $e^{j\omega_0 n}$	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} 2\pi\delta(\omega-\omega_0+2\pi k)$
11. $\cos(\omega_0 n+\phi)$ (اویلر)	$\sum_{k=-\infty}^{\infty} [\pi e^{j\phi}\delta(\omega-\omega_0+2\pi k) + \pi e^{-j\phi}\delta(\omega+\omega_0+2\pi k)]$



PEARSON

Discrete-Time Signal Processing, Third Edition
Alan V. Oppenheim • Ronald W. Schafer

$$x[n] = a^n u[n-5] \longrightarrow X(e^{j\omega}) = ?$$

حل:

$$\boxed{a^n u[n] \rightarrow \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}}$$

$$a^{n-5} u[n-5] \rightarrow e^{-j5\omega} \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

$$a^{-5} \underbrace{a^n u[n-5]} \rightarrow e^{-j5\omega} \frac{1}{1-ae^{-j\omega}}$$

$$a^n u[n-5] \rightarrow \frac{a^5 e^{-j5\omega}}{1-ae^{-j\omega}}$$

مثال: عکس تبدیل فوریه زیر را به دست آورید:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{(1-ae^{-j\omega})(1-be^{-j\omega})}$$

تجزیه به کسرهای جزئی:

$$= \frac{\frac{a}{a-b}}{1-ae^{-j\omega}} + \frac{\frac{b}{b-a}}{1-be^{-j\omega}} = \left(\frac{a}{a-b}\right)a^n u[n] - \left(\frac{b}{a-b}\right)b^n u[n]$$

تا صفحه 10

Discrete time | $\boxed{\text{random signals}}$

نویز