به نام خدا

فصل ۳: تبدیل Z

$$x[n] \xleftrightarrow{Z} X(Z)$$

زوج تبدیل Z →

سنتز: $x[n] = \frac{1}{2\pi j} \oint_C X(Z) Z^{n-1} dZ$

آنالیز: $X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n}$

تبدیل Z دنباله‌ی $x[n]$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] e^{-j\omega n}$$

تبدیل فوریه‌ی دنباله‌ی $x[n]$

نکته: $X(e^{j\omega}) = X(Z)\Big|_{Z=e^{j\omega}}$ Fig 3.1

دایره‌ی واحد

$$\underline{Z = re^{j\omega}} \rightarrow X(re^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] (re^{j\omega})^{-n}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(x[n] r^{-n}\right) e^{-j\omega n} = F\{x[n] r^{-n}\} \xrightarrow{r=1} F\{x[n]\}$$

Discrete-Time Signal Processing, Third Edition
Alan V. Oppenheim • Ronald W. Schafer

(ROC) : Region of Convergence ناحیهٔ همگرایی

ناحیه‌ای از صفحهٔ z که تبدیل z در آن ناحیه همگرا می‌شود.

$$|X(z)| < \infty \rightarrow \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |x[n]|\,|z|^{-n} < \infty$$

Fig 3.2

مثال:

دنبالهٔ نمایی راستی $x[n] = a^n u[n] \longrightarrow X(z) = ?$

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} a^n z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (a z^{-1})^n$$

$|a z^{-1}| < 1$ به شرط $= \dfrac{1}{1 - a z^{-1}} = \dfrac{z}{z-a}$, $|z| > |a|$

$\boxed{|z| > |a|}$

ROC

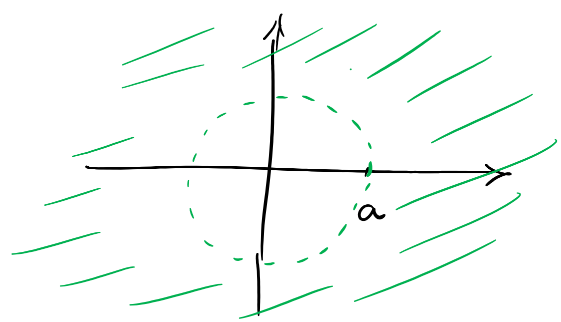


Fig 3.3

حالت خاص:

$a = 1$

$$x[n] = u[n] \xrightarrow{z} X(z) = \frac{1}{1 - z^{-1}} \; ; \; |z| > 1$$

$|a| < 1$

نکته: وجود تبدیل فوریه:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}}$$

Figure 3.1 The unit circle in the complex *z*-plane.

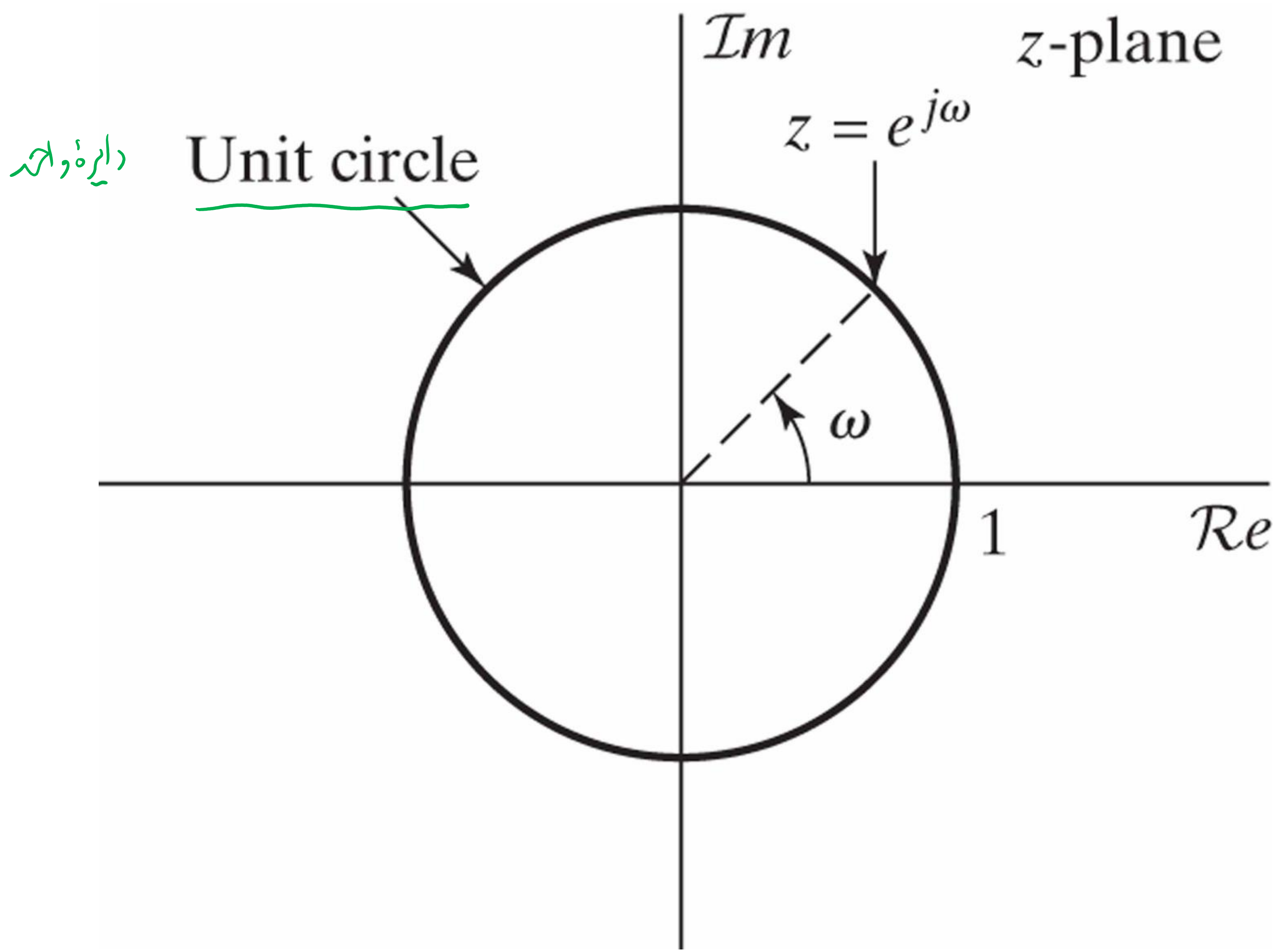


Figure 3.2 The ROC as a ring in the *z*-plane. For specific cases, the inner boundary can extend inward to the origin, and the ROC becomes a disc. For other cases, the outer boundary can extend outward to infinity.

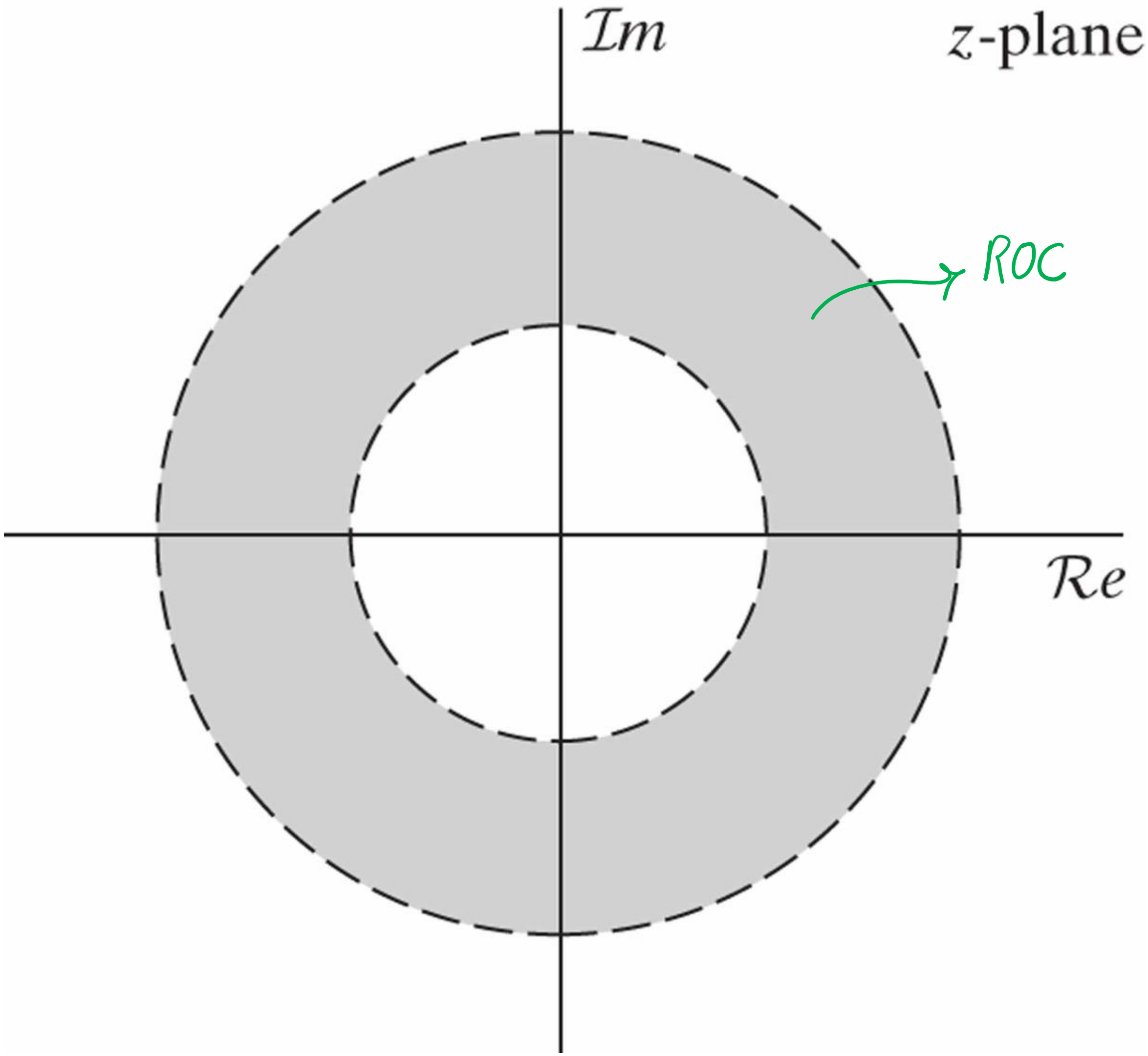
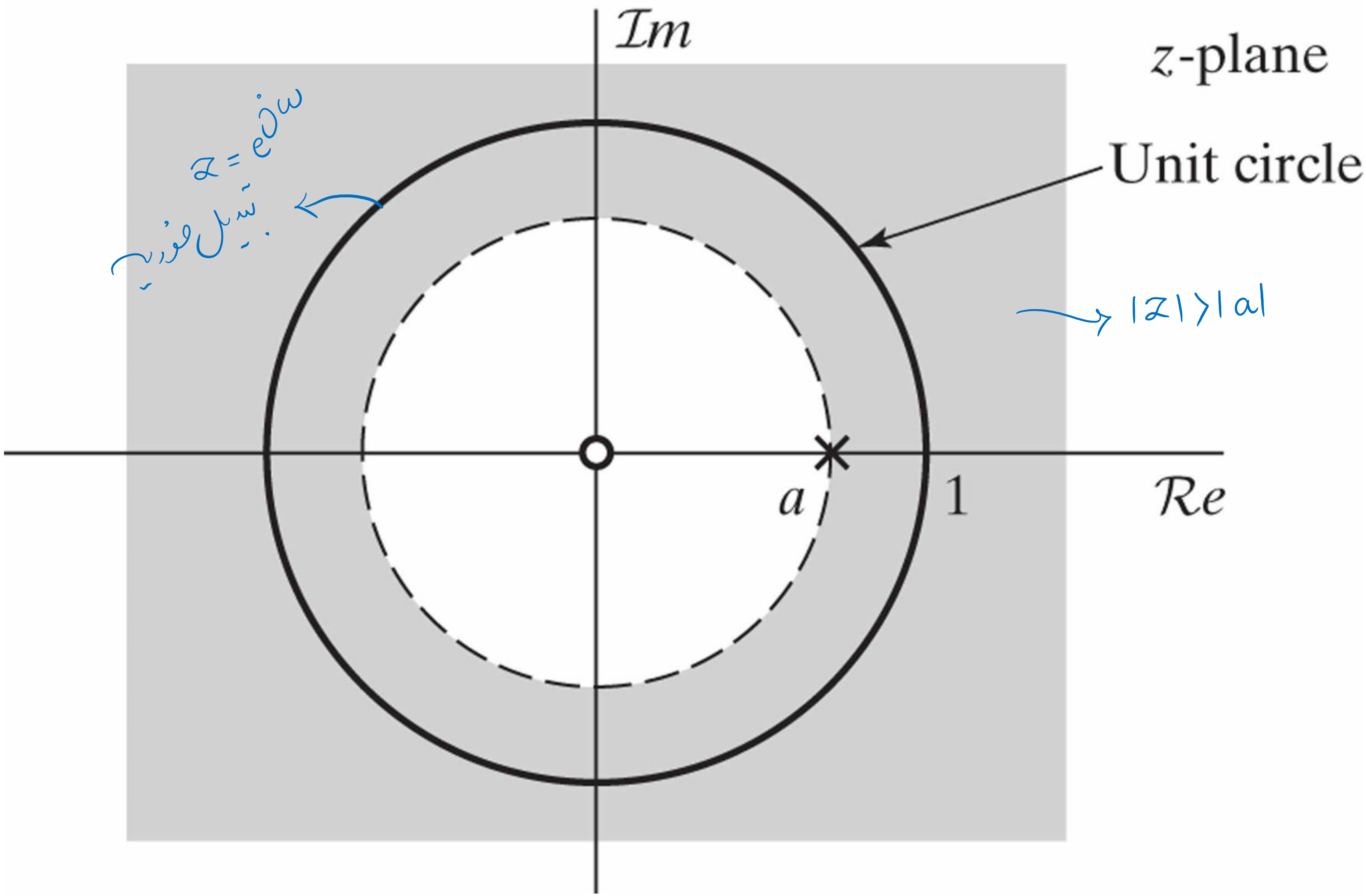


Figure 3.3 Pole–zero plot and ROC for Example 3.1.



مثال: $x[n] = -a^n u[-n-1] \rightarrow X(z) = ?$

دنباله‌ی یک است چپی

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} -a^n z^{-n} \underset{-n \to n}{=} -\sum_{n=1}^{\infty} a^{-n} z^{n} = -\sum_{n=1}^{\infty} (a^{-1} z)^n = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (a^{-1} z)^n$$

$$|a^{-1} z| < 1$$

$$\boxed{|z| < |a|}$$

ROC

نتیجه $= 1 - \dfrac{1}{1 - a^{-1} z} = \dfrac{1}{1 - a z^{-1}} = \dfrac{z}{z - a}$

$$\boxed{|z| < |a|}$$

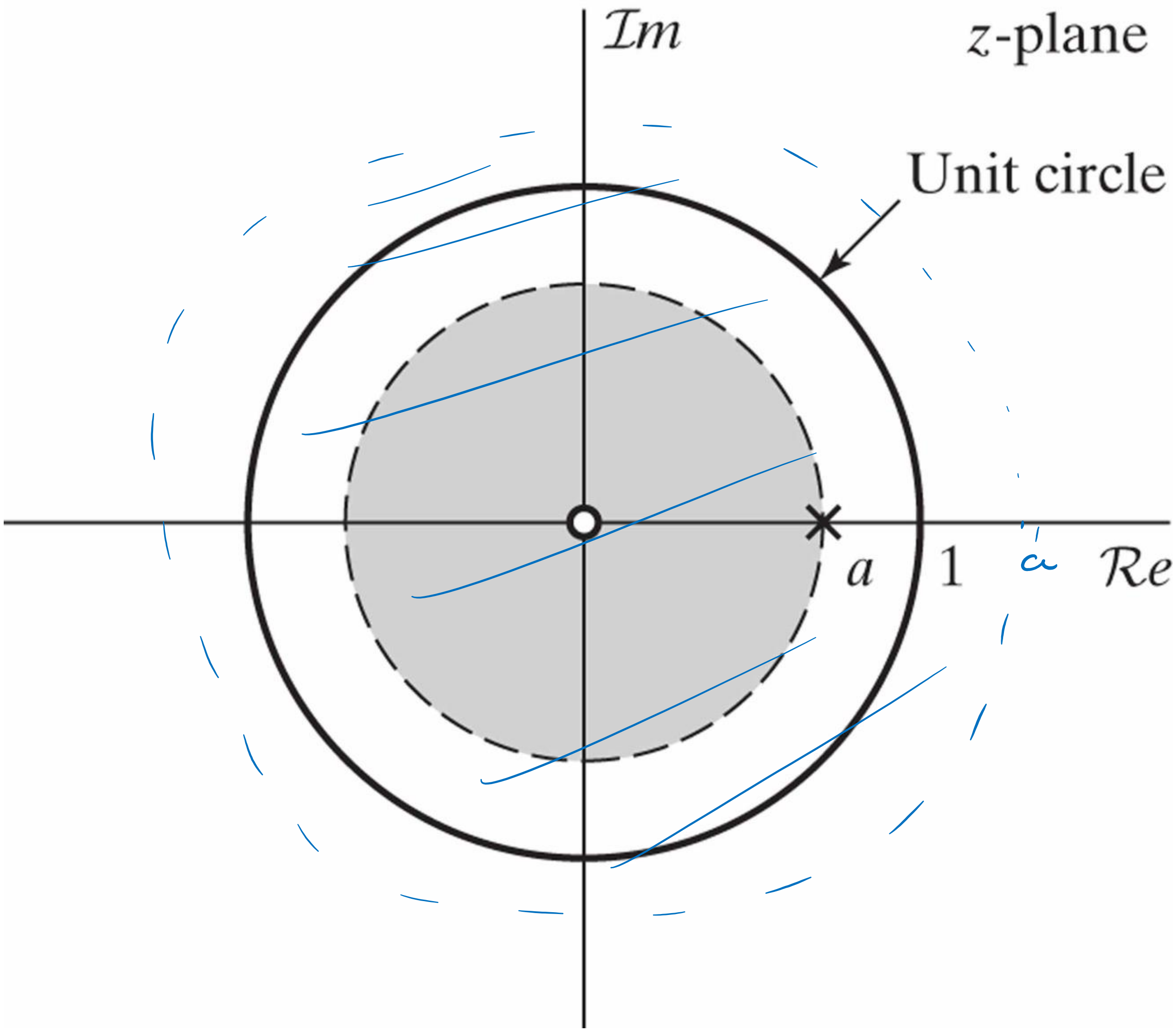
ROC

Fig 3.4

اگر $|a| > 1$ باشد تبدیل فوریه وجود دارد:

$$X(e^{j\omega}) = \frac{1}{1 - a e^{-j\omega}}$$

Figure 3.4 Pole–zero plot and ROC for Example 3.2.



مثال:

دنباله‌ی دست راستی

$$x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] \longrightarrow X(z) = ?$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} + \frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}} = \frac{2\left(1-\frac{1}{12}z^{-1}\right)}{\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)}$$

$$|z| > \frac{1}{2} \;\cap\; |z| > \frac{1}{3} = |z| > \frac{1}{2} \quad : ROC$$

* صفر و قطب‌ها:

صورت و مخرج ضرب در z^2

$$X(z) = \frac{2z\left(z-\frac{1}{12}\right)}{\left(z-\frac{1}{2}\right)\left(z+\frac{1}{3}\right)}$$

$X(z) \to 0$ صفر $z = 0, \frac{1}{12}$ o

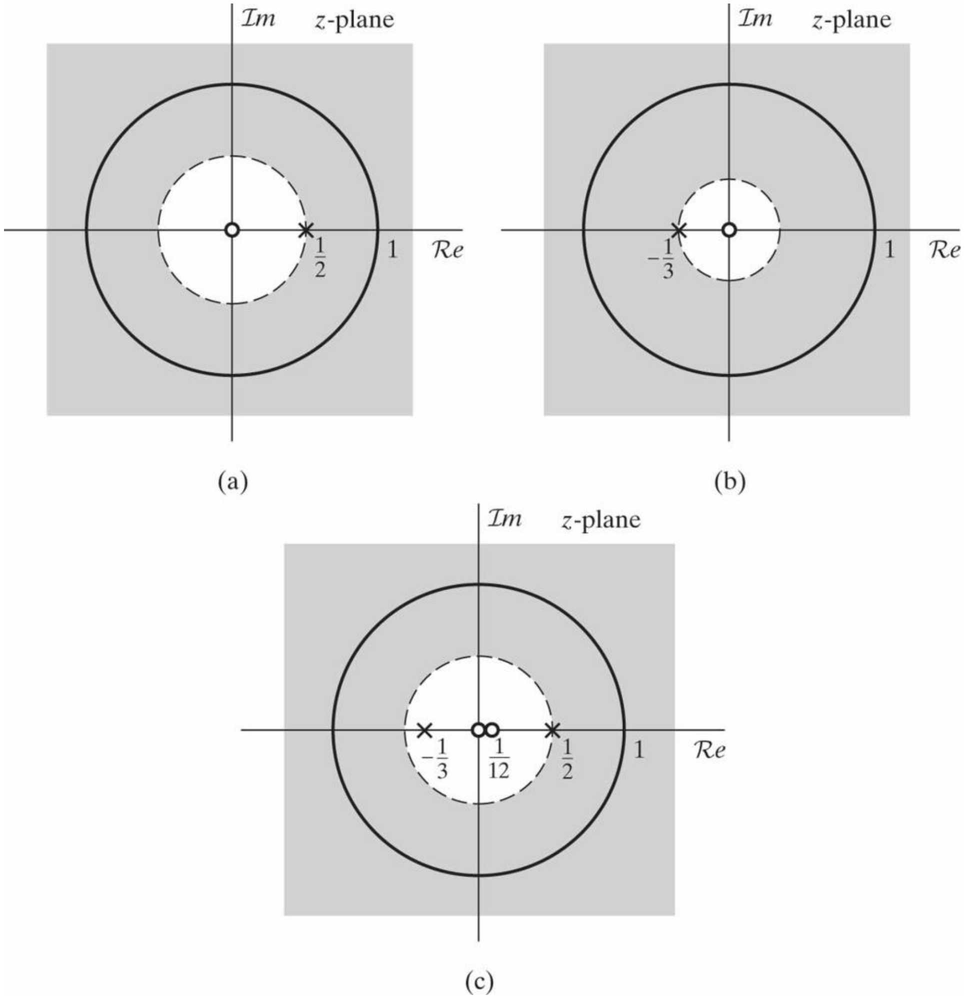
$X(z) \to \infty$ قطب $z = \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}$ x

Fig 3.5

نمودار صفر و قطب

Pole - Zero Plot

Figure 3.5 Pole–zero plot and ROC for the individual terms and the sum of terms in Examples 3.3 and 3.4. (a) $1/(1 - 1/2z^{-1})$, $|z| > 1/2$. (b) $1/(1 + 1/3z^{-1})$, $|z| > 1/3$. (c) $1/(1 - 1/2z^{-1}) + 1/(1 + 1/3z^{-1})$, $|z| > 1/2$.



مثال :

دنباله‌ی دو طرفه
two-sided

$$x[n] = \left(-\frac{1}{3}\right)^n u[n] - \left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$$

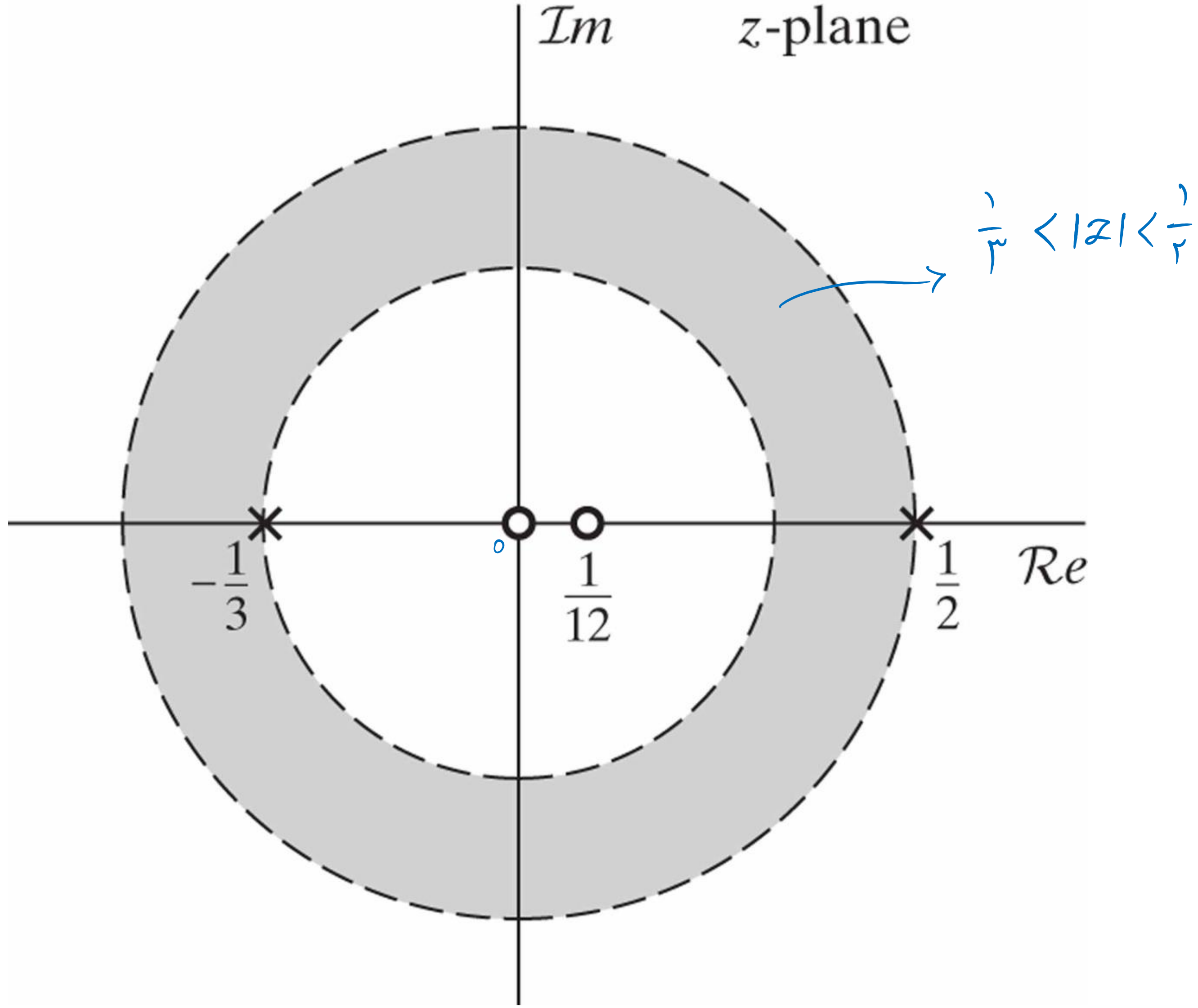
$$\frac{1}{1+\frac{1}{3}z^{-1}} \quad - \quad \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} = \frac{2\left(1-\frac{1}{12}z^{-1}\right)}{\left(1+\frac{1}{3}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)}$$

$$|z| > \frac{1}{3} \quad \cap \quad |z| < \frac{1}{2} = \frac{1}{3} < |z| < \frac{1}{2}$$

Fig 3.6

وجود تبدیل فوریه؟ خیر . زیرا ROC شامل دایره‌ی واحد نمی‌شود.

Figure 3.6 Pole–zero plot and ROC for Example 3.5.



دنباله با طول محدود:

$N_1 \leq n \leq N_2$

$$X(z)=\sum_{n=N_1}^{N_2} x[n]\, z^{-n}$$

از نظر ROC مشکلی وجود ندارد و ROC کل صفحه z را شامل می‌شود.

به استثنای $z=0$, $z=\infty$

مثال:

$$x[n]=\delta[n]+\delta[n-5]$$

$$X(z)=1+z^{-5}$$

ROC : $|z|>0$

کل صفحه به جز $z=0$

مثال:

$$x[n]=\begin{cases} a^n ; & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 ; & \text{o.w.} \end{cases}$$

دنباله نمایی با طول محدود

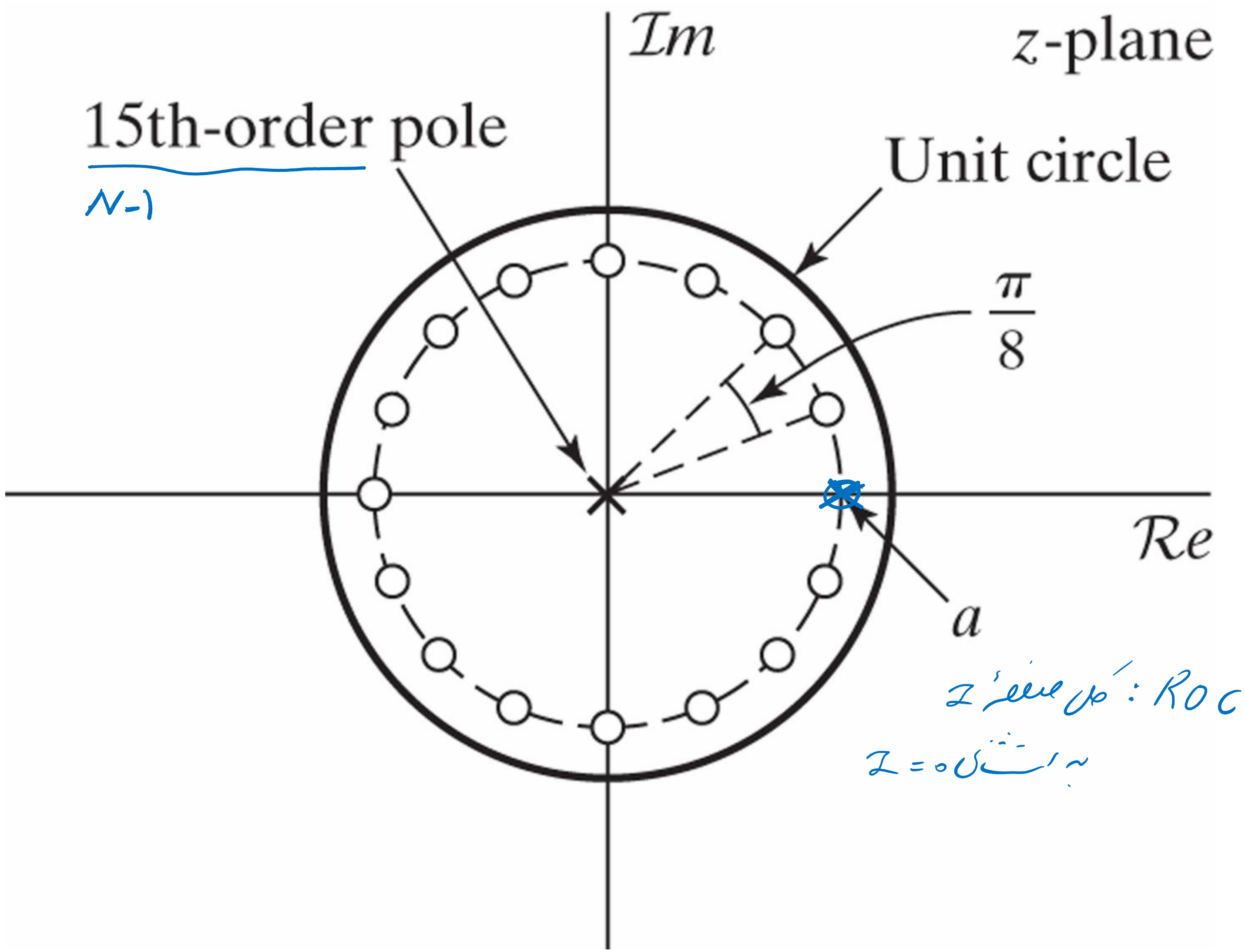
$$X(z)=\sum_{n=0}^{N-1}(az^{-1})^n=\frac{1-(az^{-1})^N}{1-az^{-1}} \xrightarrow[\frac{xz^N}{xz^N}]{\text{صفر و قطب}} X(z)=\frac{1}{z^{N-1}}\,\frac{z^N-a^N}{z-a}$$

صفرها $z_k=ae^{j\left(\frac{2\pi k}{N}\right)}$, $k=0,1,\dots,N-1$

قطب $z=a$

$z=0$ از مرتبه $N-1$

Figure 3.7 Pole–zero plot for Example 3.6 with $N = 16$ and a real such that $0 < a < 1$. The ROC in this example consists of all values of z except $z = 0$.



ROC : کل صفحه‌ی z

به استثنای z = 0

زوج تبدیل zها کاستاندل:

Table 3.1 SOME COMMON *z*-TRANSFORM PAIRS

TABLE 3.1 SOME COMMON *z*-TRANSFORM PAIRS

Sequence	Transform	ROC
1. $\delta[n]$	1	All z
2. $u[n]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\| > 1$
3. $-u[-n-1]$	$\frac{1}{1-z^{-1}}$	$\|z\| < 1$
4. $\delta[n-m]$	z^{-m}	All z except 0 (if $m > 0$) or ∞ (if $m < 0$)
5. $a^n u[n]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| > \|a\|$
6. $-a^n u[-n-1]$	$\frac{1}{1-az^{-1}}$	$\|z\| < \|a\|$
7. $na^n u[n]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\| > \|a\|$
8. $-na^n u[-n-1]$	$\frac{az^{-1}}{(1-az^{-1})^2}$	$\|z\| < \|a\|$
9. $\cos(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{1-\cos(\omega_0)z^{-1}}{1-2\cos(\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
10. $\sin(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{\sin(\omega_0)z^{-1}}{1-2\cos(\omega_0)z^{-1}+z^{-2}}$	$\|z\| > 1$
11. $r^n\cos(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{1-r\cos(\omega_0)z^{-1}}{1-2r\cos(\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\|z\| > r$
12. $r^n\sin(\omega_0 n)u[n]$	$\frac{r\sin(\omega_0)z^{-1}}{1-2r\cos(\omega_0)z^{-1}+r^2z^{-2}}$	$\|z\| > r$
13. $\begin{cases} a^n, & 0 \le n \le N-1, \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$	$\frac{1-a^N z^{-N}}{1-az^{-1}}$	$\|z\| > 0$

ویژگی های ROC :

۱- ROC به شکل حلقه هایی به یکی از شکل های

$|z| > r_R \geq 0$ خارج از یک دایره (دست راستی)

$|z| < r_L \leq \infty$ داخل یک دایره (دست چپی)

$0 < r_R < |z| < r_L \leq \infty$ بین دو دایره

Fig 3.8

۲- تبدیل فوریه دنباله $x[n]$ همگرا می شود (وجود دارد) اگر و فقط اگر ROC تبدیل z دنباله $x[n]$ شامل دایره واحد باشد.

۳- ROC هیچ قطبی را در بر نمی گیرد.

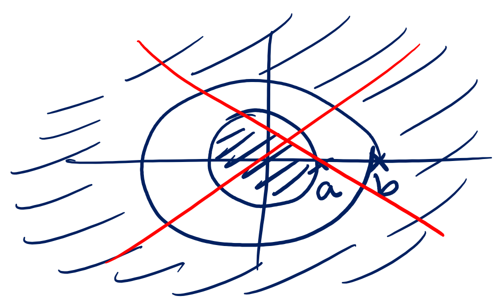
۴- اگر دنباله $x[n]$ یک دنباله با طول محدود باشد، ROC آن تمام صفحه z به جز احتمالاً در $z=0$ یا $z=\infty$

۵- اگر دنباله $x[n]$ دنباله دست راستی باشد، ROC آن خارج از یک دایره خواهد بود. خارج از دایره متناظر با بیرونی ترین قطب
به جز احتمالاً در $z=\infty$ Fig 3.8, b

۶- اگر دنباله $x[n]$ دنباله دست چپی باشد، ROC آن داخل یک دایره خواهد بود. داخل دایره متناظر با درونی ترین قطب
به جز احتمالاً در $z=0$ Fig 3.8, c

۷- اگر دنباله $x[n]$ دو طرفه باشد، ROC آن حلقه ای خواهد بود که با دو قطب محدود می شود. Fig 3.8, d & e

۸- ROC یک ناحیه پیوسته است.



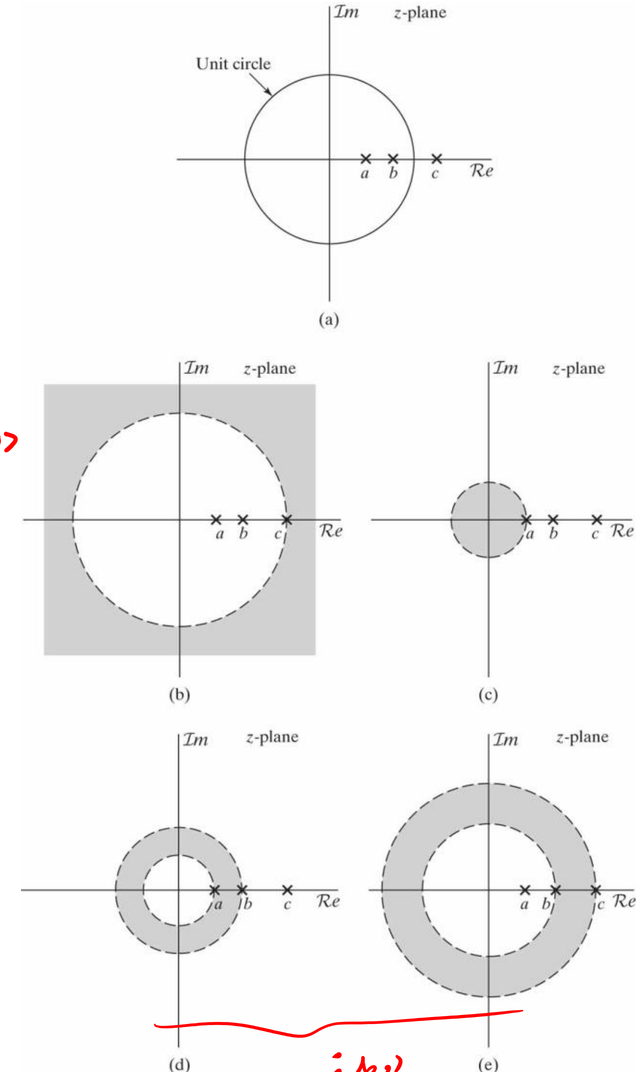
غ

ریشه های P : صفرها

$$X(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

ریشه های Q : قطبها

Figure 3.8 Examples of four *z*-transforms with the same pole–zero locations, illustrating the different possibilities for the ROC, each of which corresponds to a different sequence: (b) to a right-sided sequence, (c) to a left-sided sequence, (d) to a two-sided sequence, and (e) to a two-sided sequence.



دست راستی

دست چپی

دوطرفه

ویژگی‌های سیستم LTI از روی ROC تابع تبدیل آن:

$H(z)$: تابع تبدیل z پاسخ ضربه

پایداری : ROC شامل دایره واحد باشد. Fig 3.9

علّی بودن : ROC دست راستی باشد (خارج از بیرونی‌ترین قطب)

علّی و پایدار : ROC دست راستی و شامل دایرهٔ واحد

از روی قطبها : اگر همهٔ قطبهای سیستم داخل دایرهٔ واحد باشد.

Figure 3.9 Pole–zero plot for the system function in Example 3.8.

ROC پایدار : $\frac{1}{2} < |z| < 2$

ROC علّی : $|z| > 2$

سیستم نمی‌تواند هم علّی و هم پایدار باشد.

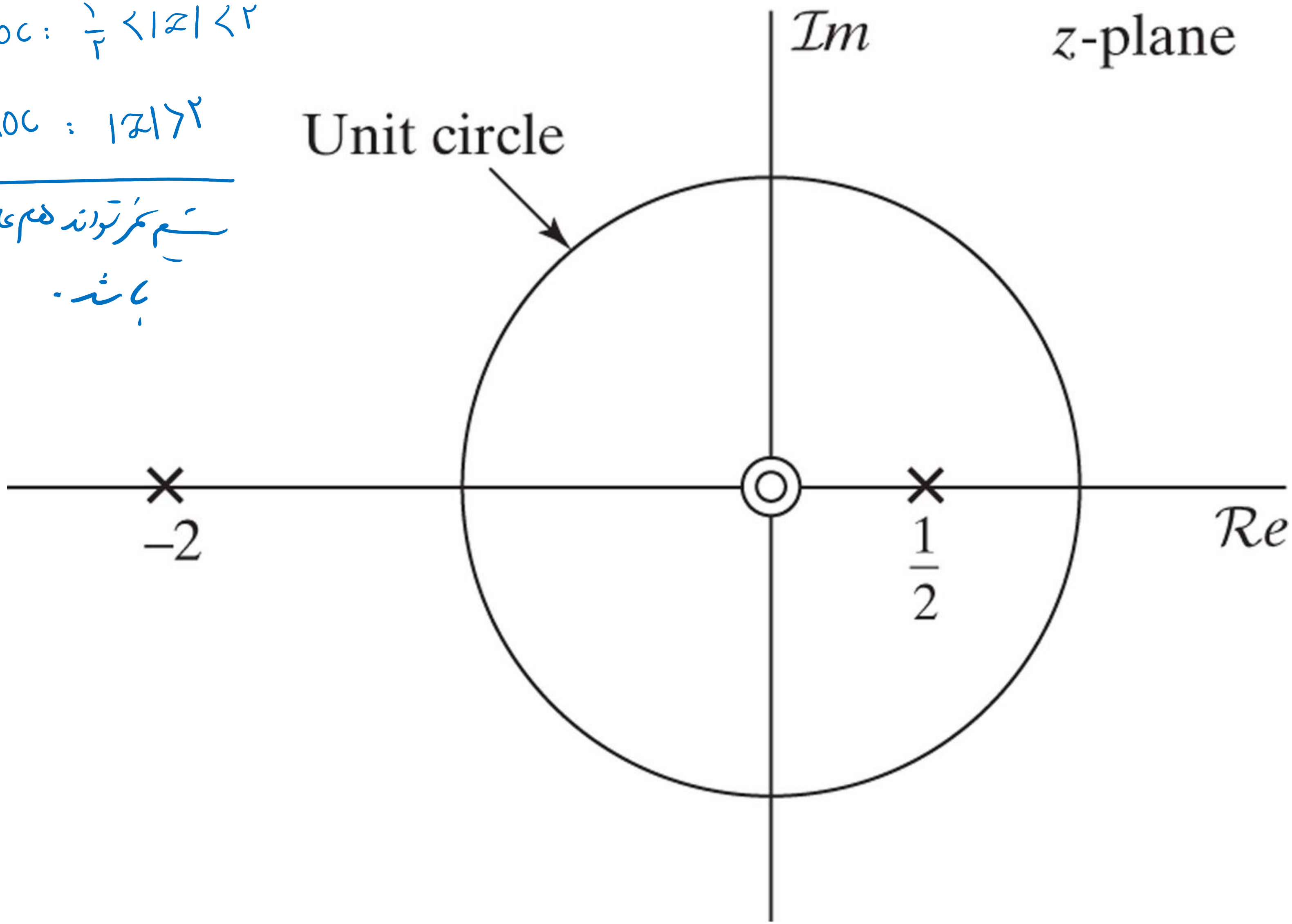
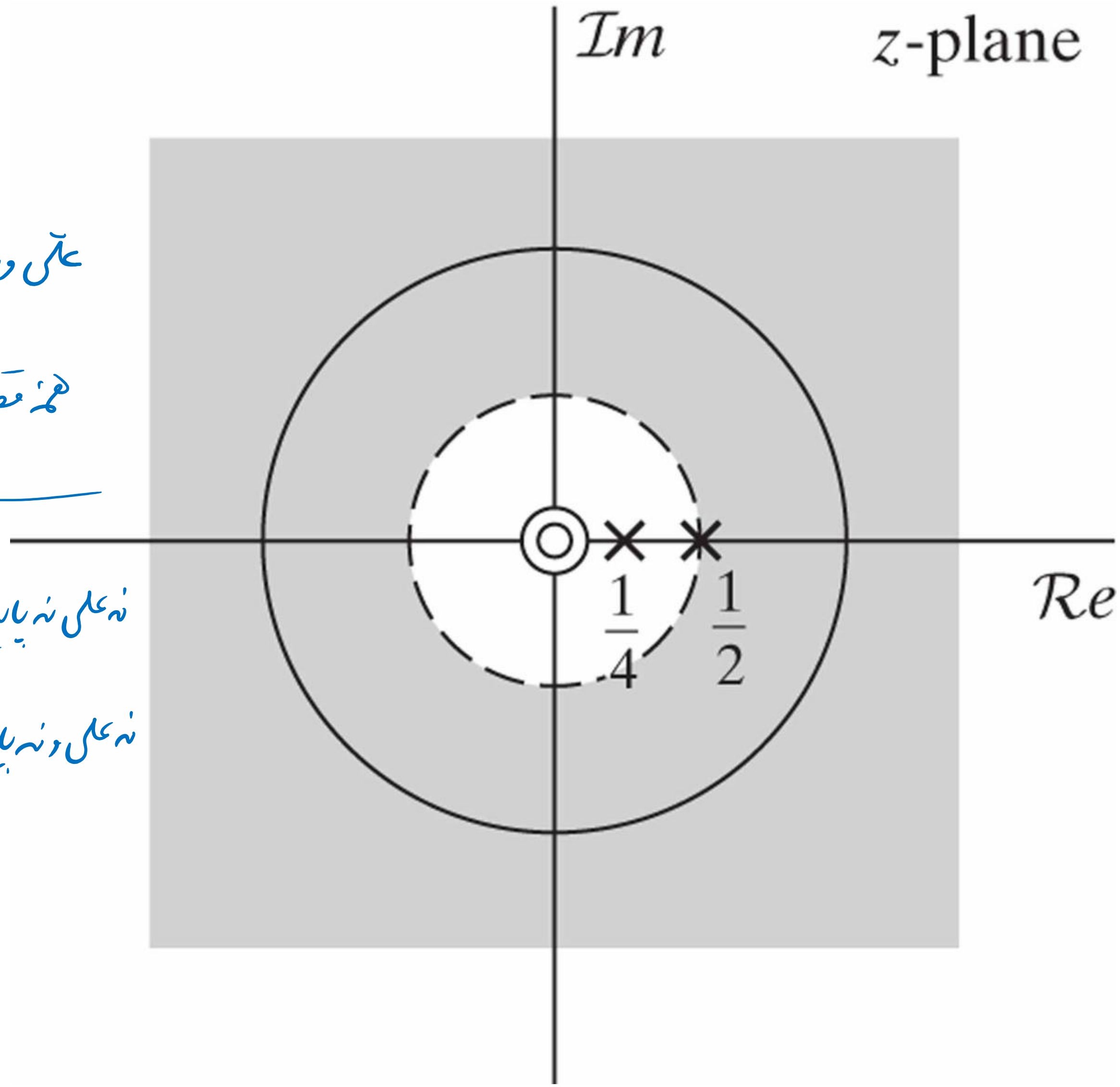


Figure 3.10 Pole–zero plot and ROC for Example 3.9.



$|z| > \frac{1}{2}$: علّی و پایدار

همه قطبها داخل دایره واحد

$|z| < \frac{1}{4}$: نه علّی نه پایدار

$\frac{1}{4} < |z| < \frac{1}{2}$: نه علّی و نه پایدار

عکس تبدیل z :

۱- روش Inspection :

$$\Longrightarrow \quad a^n u[n] \xleftrightarrow{\;z\;} \frac{1}{1-az^{-1}}, \quad |z|>|a|$$

$$X(z) = \frac{1}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \; ; \quad |z| > \frac{1}{2} \longrightarrow x[n] = \left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

$$; \quad |z| < \frac{1}{2} \longrightarrow x[n] = -\left(\frac{1}{2}\right)^n u[-n-1]$$

۲- روش بسط به کسرهای جزئی :

مثال :

$$X(z) = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{4}z^{-1}\right)\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)} \; ; \quad |z| > \frac{1}{2}$$

$$X(z) = \frac{A_1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{A_2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}} \Rightarrow A_1 = -1, \quad A_2 = 2$$

$$X(z) = \frac{-1}{1-\frac{1}{4}z^{-1}} + \frac{2}{1-\frac{1}{2}z^{-1}}$$

$$|z| > \frac{1}{4} \qquad\qquad |z| > \frac{1}{2}$$

$$\longrightarrow x[n] = -\left(\frac{1}{4}\right)^n u[n] + 2\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n]$$

مثال:

$$X(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} \; ; \quad |z| > 1$$

$$= \frac{(1 + z^{-1})^2}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - z^{-1})}$$

Fig 3.11

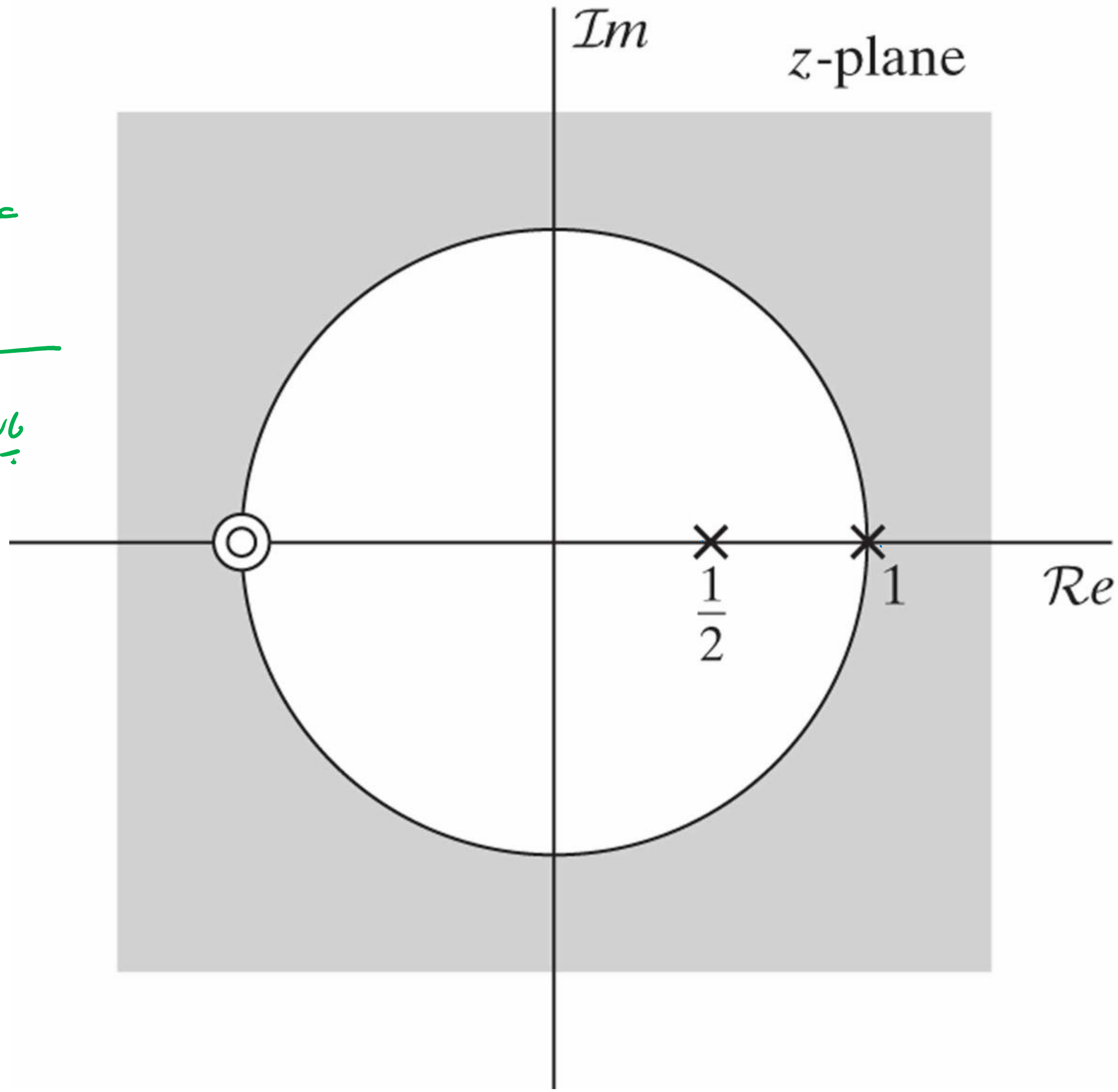
- با توجه به اینکه درجهٔ صورت از مخرج کوچکتر نیست ابتدا تقسیم را انجام میدهیم:

$$\begin{array}{r|l} z^{-2} + 2z^{-1} + 1 & \frac{1}{2}z^{-2} - \frac{3}{2}z^{-1} + 1 \\ \cline{2-2} z^{-2} - 3z^{-1} + 2 & 2 \\ \cline{1-1} 5z^{-1} - 1 & \end{array}$$

$$X(z) = 2 + \frac{5z^{-1} - 1}{1 - \frac{3}{2}z^{-1} + \frac{1}{2}z^{-2}} = 2 + \frac{A_1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})} + \frac{A_2}{(1 - z^{-1})} \quad \begin{cases} A_1 = -9 \\ A_2 = 8 \end{cases}$$

$$\rightarrow x[n] = 2\delta[n] - 9\left(\frac{1}{2}\right)^n u[n] + 8\,u[n]$$

Figure 3.11 Pole–zero plot for the z-transform in Example 3.10.



علّی؟ علّی

زیرا ROC دست راستی

پایدار؟ ناپایدار

زیرا $|z|>1$

شامل دایره‌ی واحد نمی‌شود.

۳ـ روش بسط سری های توانی :

$$X(z)=\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]z^{-n}}=\cdots+x[-2]z^{2}+x[-1]z+x[0]+x[1]z^{-1}+x[2]z^{-2}+\cdots$$

مثال :

$$X(z)=z^{2}\left(1-\frac{1}{2}z^{-1}\right)\left(1+z^{-1}\right)\left(1-z^{-1}\right)$$

$$=z^{2}-\frac{1}{2}z-1+\frac{1}{2}z^{-1}$$

$$x[n]=\begin{cases}1 & ; \quad n=-2\\ -\frac{1}{2} & ; \quad n=-1\\ -1 & ; \quad n=0\\ \frac{1}{2} & ; \quad n=1\\ 0 & ; \quad \text{o.w.}\end{cases}$$

$$\rightarrow x[n]=\delta[n+2]-\frac{1}{2}\delta[n+1]-\delta[n]+\frac{1}{2}\delta[n-1]$$

مثال :

$$X(z)=\log\left(1+az^{-1}\right) \quad ; \quad |z|>|a|$$

طبق تیلور

$$X(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}a^{n}z^{-n}}{n} \longrightarrow \boxed{x[n]=\frac{(-1)^{n+1}a^{n}}{n}u[n-1]} \checkmark$$

ویژگی های تبدیل z :

② $X(z) = z^{-3}$ $\quad |z|>0$

$x[n+4] \longleftrightarrow z^{4}X(z)$

$z^{4}z^{-3} = z$ $\quad |z| \geq 0$ غیراز ∞

Table 3.2 SOME *z*-TRANSFORM PROPERTIES

TABLE 3.2 SOME *z*-TRANSFORM PROPERTIES

	Property Number	Section Reference	Sequence	Transform	ROC
			$x[n]$	$X(z)$	R_x
			$x_1[n]$	$X_1(z)$	R_{x_1}
			$x_2[n]$	$X_2(z)$	R_{x_2}
خطی بودن	1	3.4.1	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1(z) + bX_2(z)$	Contains $R_{x_1} \cap R_{x_2}$
انتقال زمانی	2	3.4.2	$x[n - n_0]$	$z^{-n_0}X(z)$	R_x, except for the possible addition or deletion of the origin or ∞
ضرب در دنباله نمایی	3	3.4.3	$z_0^n x[n]$	$X(z/z_0)$	$\|z_0\|R_x$
مشتق در حوزه z	4	3.4.4	$nx[n]$	$-z\dfrac{dX(z)}{dz}$	R_x
مزدوج	5	3.4.5	$x^*[n]$	$X^*(z^*)$	R_x
	6		$\mathcal{R}e\{x[n]\}$	$\frac{1}{2}[X(z) + X^*(z^*)]$	Contains R_x
	7		$\mathcal{I}m\{x[n]\}$	$\frac{1}{2j}[X(z) - X^*(z^*)]$	Contains R_x
	8	3.4.6	$x^*[-n]$	$X^*(1/z^*)$	$1/R_x$
کانولوشن	9	3.4.7	$x_1[n] * x_2[n]$	$X_1(z)X_2(z)$	Contains $R_{x_1} \cap R_{x_2}$

مثال : معکوس تبدیل Z زیر را بدست آورید :

$$X(Z) = \log(1 + aZ^{-1}) \; ; \quad |Z| > |a|$$

$$\underbrace{\frac{dX(Z)}{dZ}} = \frac{-aZ^{-2}}{1 + aZ^{-1}}$$

4 خاصیت

$$n\,x[n] \xleftrightarrow{Z} -Z\frac{dX(Z)}{dZ} = \underbrace{\frac{aZ^{-1}}{1 + aZ^{-1}}} \; , \quad \underline{|Z| > |a|}$$

Z تبدیل معکوس

$$n\,x[n] = a(-a)^{n-1} u[n-1]$$

$$\rightarrow \boxed{x[n] = (-1)^{n+1}\frac{a^n}{n} u[n-1]} \; \checkmark$$

تا ابتدای تبدیل Z ، سیستم های LTI

به نام خدا

ادامه فصل سوم: تبدیل z و سیستمهای LTI :

حوزه:

زمان: $x[n] \longrightarrow \boxed{h[n]} \longrightarrow y[n] = x[n] * h[n]$

پاسخ ضربه

فرکانس: $X(e^{j\omega}) \longrightarrow \boxed{H(e^{j\omega})} \longrightarrow Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})H(e^{j\omega})$

پاسخ فرکانسی

z: $X(z) \longrightarrow \boxed{H(z)} \longrightarrow \boxed{Y(z) = X(z)H(z)}$

system function

تابع تبدیل

$$\Rightarrow \boxed{H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)}}$$

مثال:

$$\begin{cases} h[n] = a^n u[n] \\ x[n] = A\,u[n] \end{cases} \qquad |a|<1$$

خروجی سیستم؟

$$H(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \; ; \; |z|>|a|$$

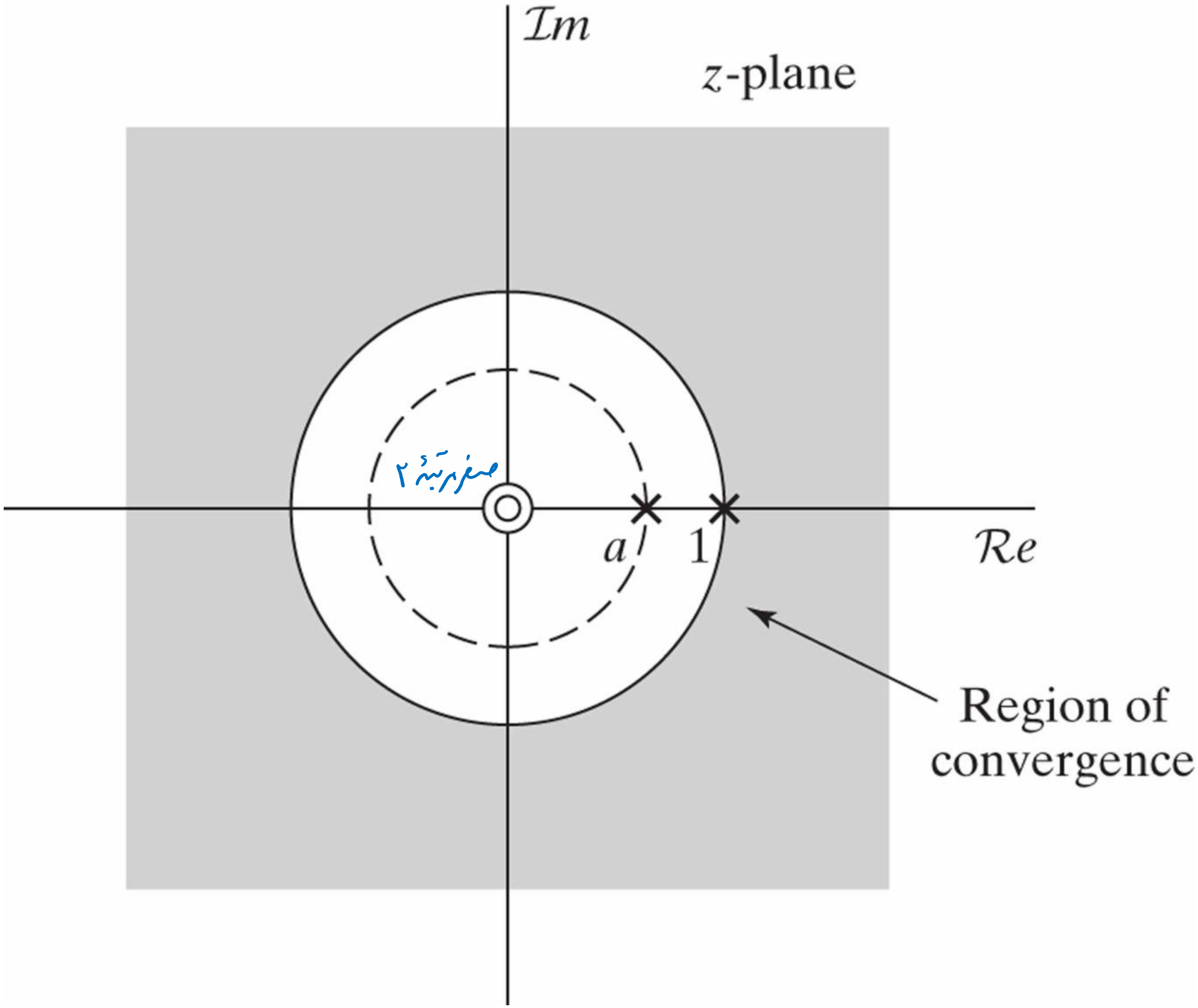
$$X(z) = \frac{A}{1-z^{-1}} \; ; \; |z|>1$$

$$\longrightarrow Y(z) = \frac{A}{(1-az^{-1})(1-z^{-1})} = \frac{Az^2}{(z-a)(z-1)} \; ; \; |z|>1$$

$$= \frac{A}{1-a}\left(\frac{1}{1-z^{-1}} - \frac{a}{1-az^{-1}}\right) \; ; \; |z|>1$$

$$\longrightarrow y[n] = \frac{A}{1-a}\left(1-a^{n+1}\right)u[n]$$

Figure 3.12 Pole–zero plot for the z-transform of the convolution of the sequences $u[n]$ and $a^n u[n]$ (assuming $|a| < 1$).



حالت کلی سیستم های زمان گسسته LTI :

$$\sum_{k=0}^{N} a_k\, y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k\, x[n-k]$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k} Y(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} X(z)$$

$$\Rightarrow \boxed{H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}}$$

مثال: سیستم مرتبه اول :

$$y[n] = a\,y[n-1] + x[n]$$

$$H(z), h[n] = ?$$

$$\xrightarrow{\mathcal{Z}} Y(z) = a z^{-1} Y(z) + X(z)$$

$$H(z) = \frac{1}{1-az^{-1}} \;;\; |z|>|a| \longrightarrow h[n] = a^n u[n]$$