DSP: Chapter 4

Sampling of Continuous-Time Signals

فصل ٤ : نمونه برداری از سیگنال های زمان پیوسته

$x_c(t)$ زمان پیوسته

$x[n] = x_c(nT) \quad ; \quad -\infty < n < \infty$ زمان گسسته (نمونه برداری)

گام نمونه برداری
پریود

$f_s = \dfrac{1}{T}$ فرکانس نمونه برداری

$\Omega_s = \dfrac{2\pi}{T}$ $\dfrac{\text{radians}}{\text{sec}}$

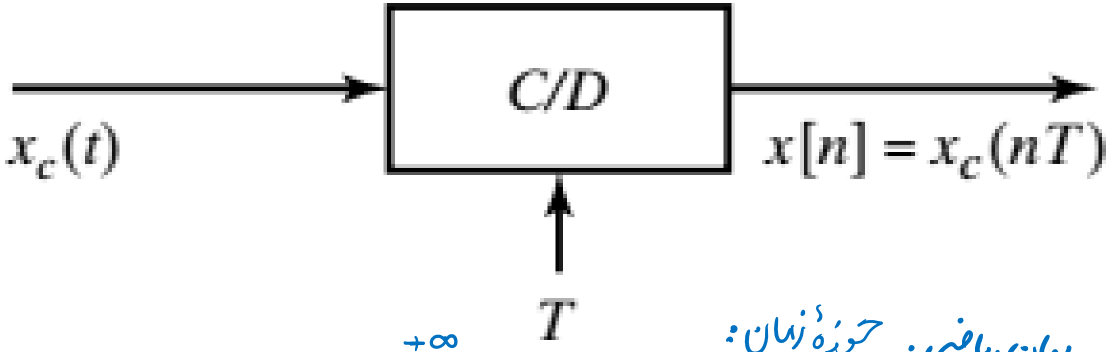


Figure 1 Block diagram representation of an ideal continuous-to-discrete-time (C/D) converter.

بیان ریاضی: حوزهٔ زمان:

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT)$$ قطار ضربه با پریود T

$$x_s(t) = x_c(t)\,s(t) = x_c(t)\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT)\,\delta(t-nT)$$

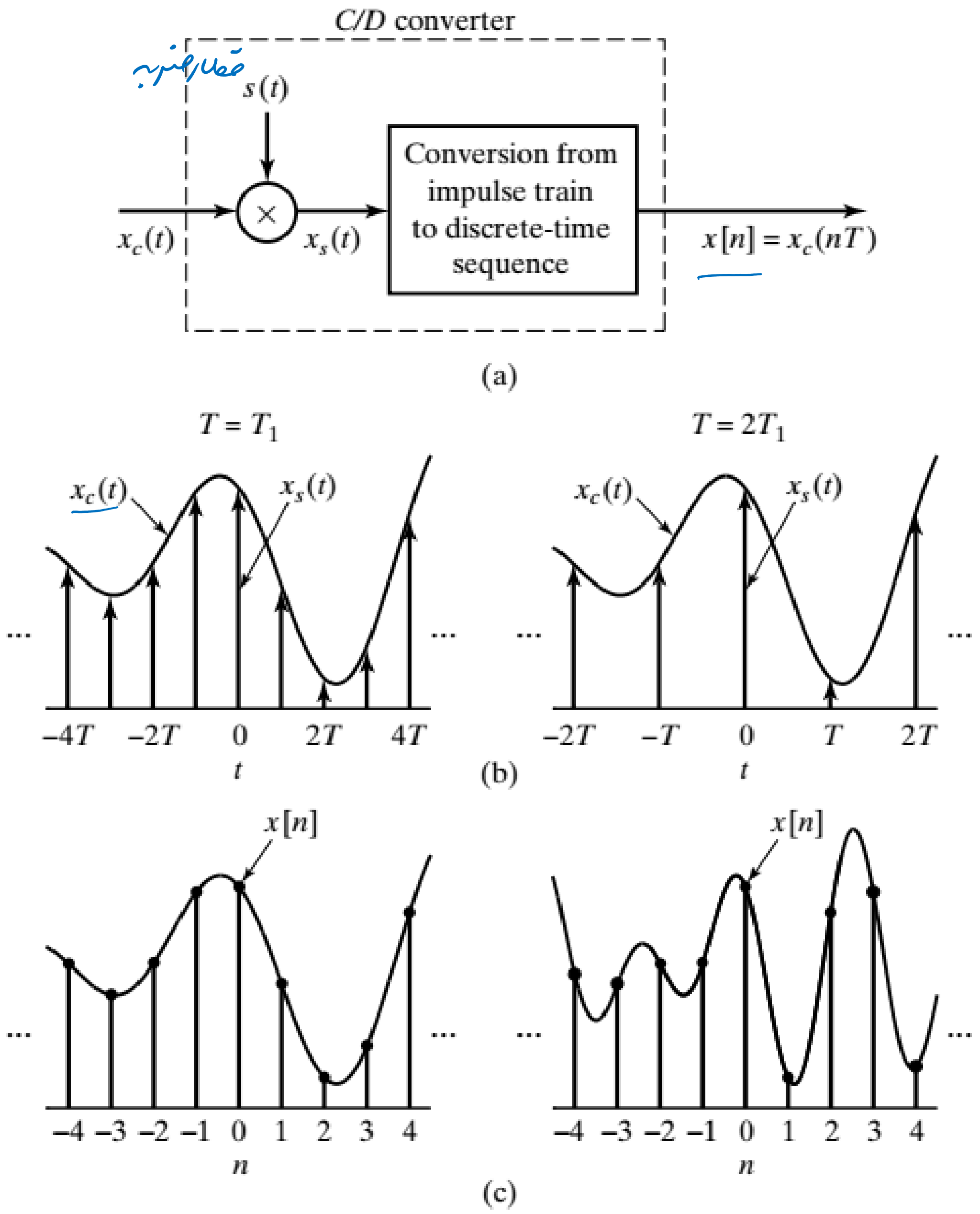


Figure 2 Sampling with a periodic impulse train, followed by conversion to a discrete-time sequence. (a) Overall system. (b) $x_s(t)$ for two sampling rates. (c) The output sequence for the two different sampling rates.

نمایش حوزه فرکانس نمونه برداری :

$s(t) \xleftrightarrow{F} S(j\Omega)$

$\boxed{\Omega : \text{زمان پیوسته}}$

$$S(j\Omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\Omega - k\Omega_s) \qquad \Omega_s = \frac{2\pi}{T}$$

تبدیل فوریه سیگنال $x_c(t)$

$$X_s(j\Omega) = \frac{1}{2\pi} X_c(j\Omega) * S(j\Omega)$$

$$\boxed{X_s(j\Omega) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c(j(\Omega - k\Omega_s))}$$

$$\sum \begin{cases} X_c(j\Omega) \\ X_c(j(\Omega \pm \Omega_s)) \\ X_c(j(\Omega \pm 2\Omega_s)) \\ \vdots \end{cases}$$

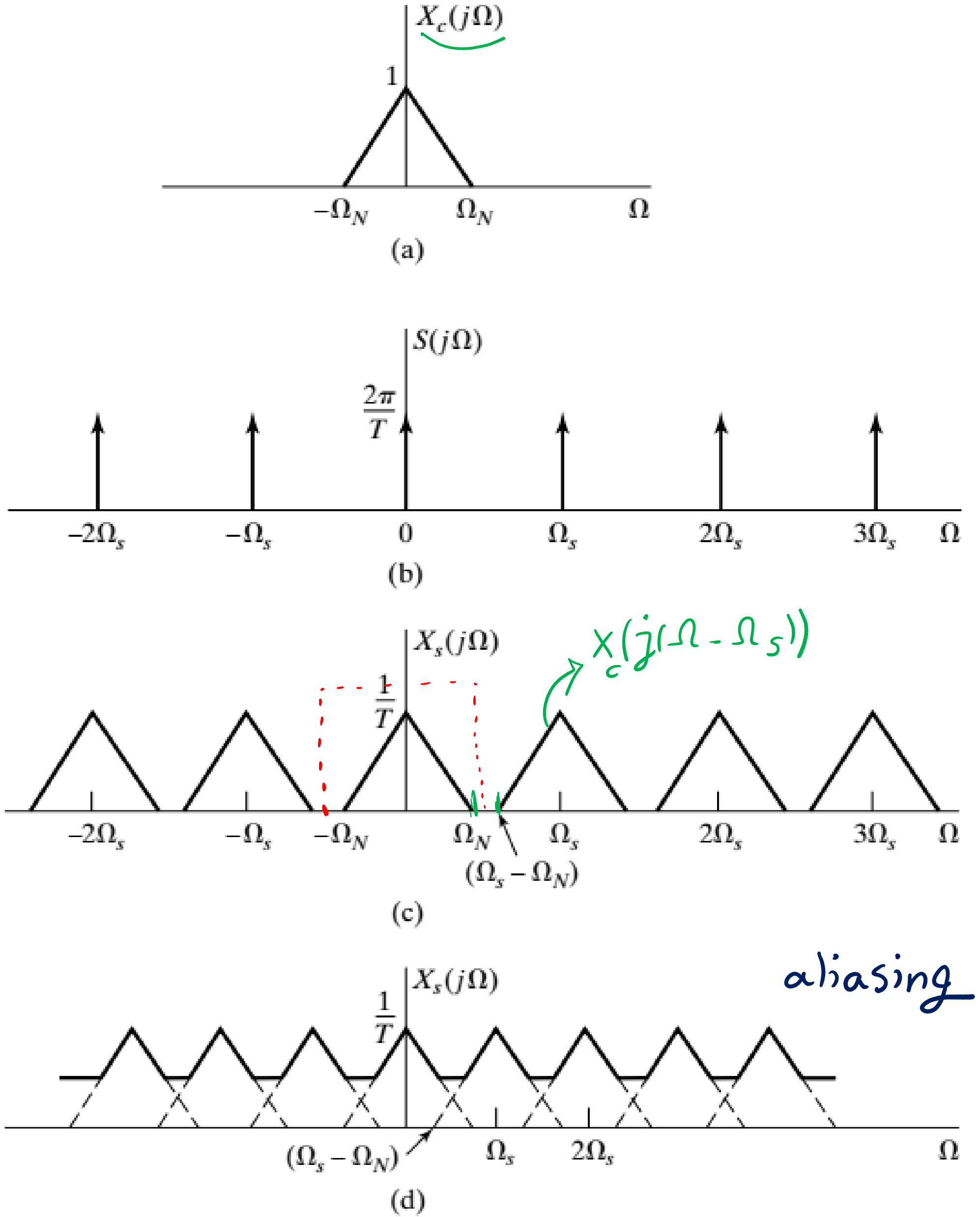
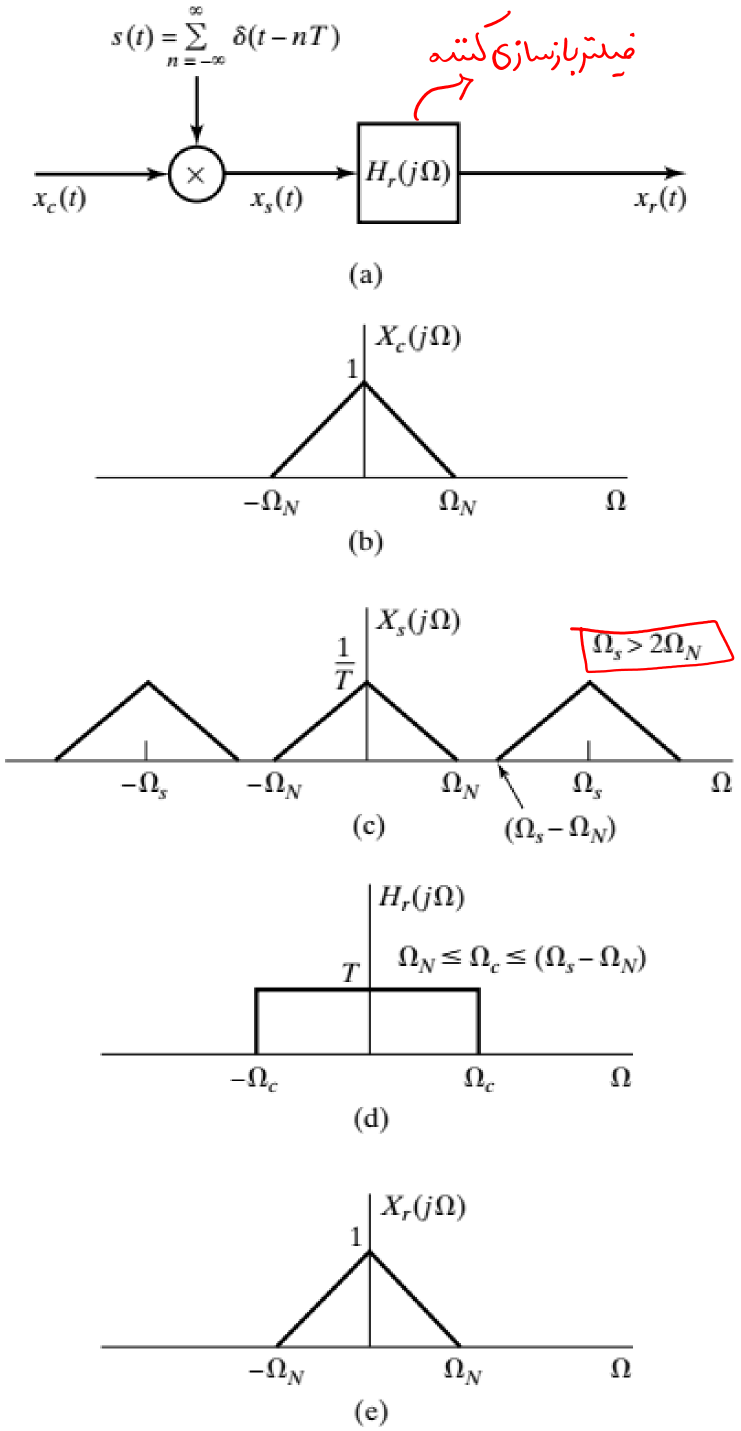


Figure 3 Frequency-domain representation of sampling in the time domain. (a) Spectrum of the original signal. (b) Fourier transform of the sampling function. (c) Fourier transform of the sampled signal with $\Omega_S > 2\Omega_N$. (d) Fourier transform of the sampled signal with $\Omega_S < 2\Omega_N$.

شرط نمونه برداری

$\Omega_s - \Omega_N \geq \Omega_N \rightarrow \boxed{\Omega_s \geq ۲\Omega_N}$



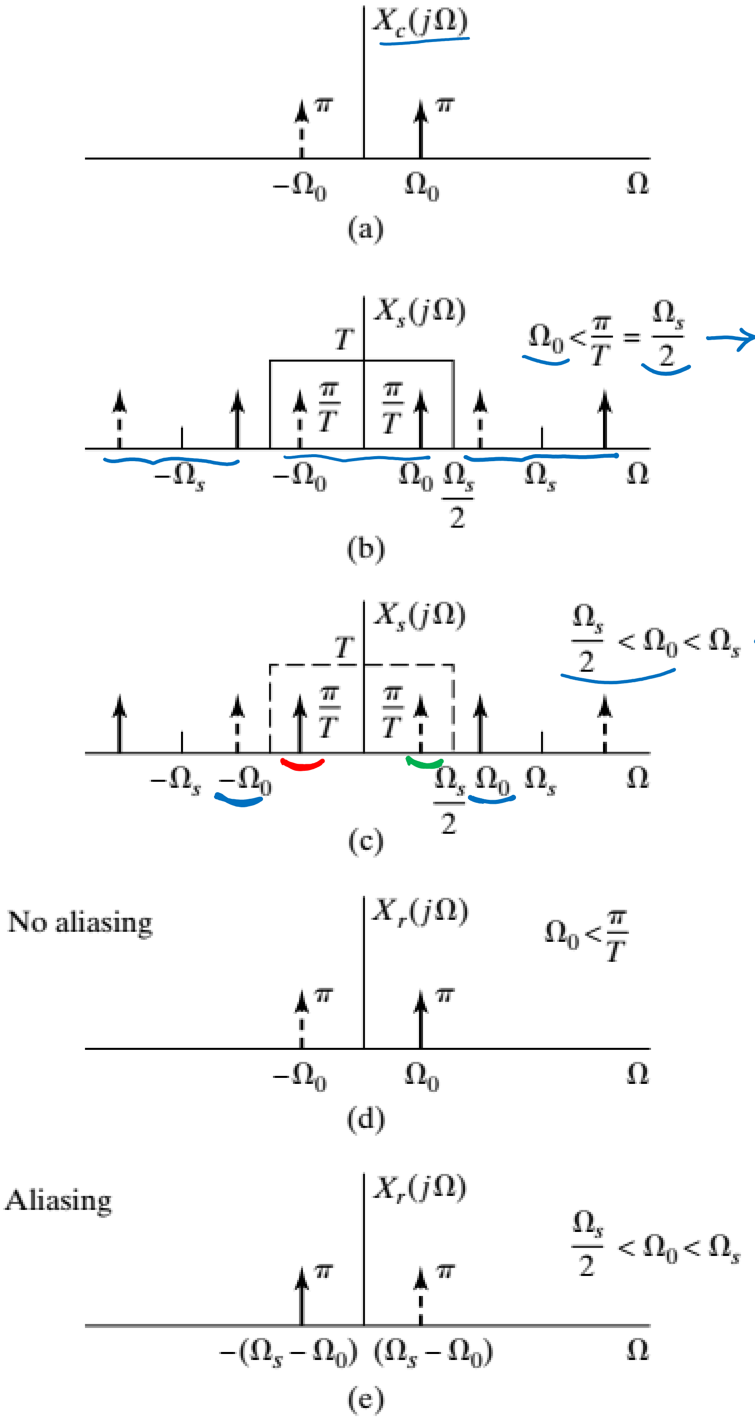
$\rightarrow$ $x_r(j\Omega) = x_c(j\Omega)$

Figure 4 Exact recovery of a continuous-time signal from its samples using an ideal lowpass filter.

اثر عدم رعایت شرط نایکوئیست :

$x_c(t)=\cos\Omega_0 t$

$\rightarrow X_c(j\Omega)=\pi\delta(\Omega-\Omega_0)+\pi\delta(\Omega+\Omega_0)$



$\rightarrow \boxed{\Omega_s>2\Omega_0}$

$\rightarrow \Omega_s<2\Omega_0$

بدون الیاسینگ

الیاسینگ

$X_r(j\Omega)=\pi\delta(\Omega-(\Omega_s-\Omega_0))+\pi\delta(\Omega+(\Omega_s-\Omega_0))$

$\rightarrow x_r(t)=\cos((\Omega_s-\Omega_0)t)$

فرکانس دیگری بازسازی شده است.

Figure 5 The effect of aliasing in the sampling of a cosine signal.

* قضیهٔ نمونه برداری Nyquist - Shannon :

فرض کنید $x_c(t)$ یک سیگنال باند محدود با

$$X_c(j\Omega)=0 \quad ; \quad \text{for } |\Omega| \geq \Omega_N$$

پهنای باند سیگنال

در این صورت $x_c(t)$ به طور یکتا با نمونه‌های آن $x[n]=x_c(nT)$ قابل بیان است اگر

$n=0,\pm1,\pm2,\dots$

$$\Omega_s = \frac{2\pi}{T} \geq 2\Omega_N$$

فرکانس نمونه برداری

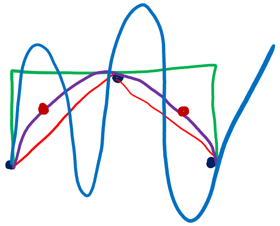
پریود نمونه برداری

فرکانس نایکوئیست : Ω_N

نرخ نایکوئیست : $2\Omega_N$

اگر این شرط برقرار نباشد پدیدهٔ الیاسینگ رخ می‌دهد.

aliasing



بیان تبدیل فوریه زمان گسسته DTFT دنباله $x[n]$:

ω : فرکانس زمان گسسته

$$x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})$$

$$x_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_c(nT)\,\delta(t-nT) \xrightarrow{F_t} X_s(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{x_c(nT)}_{x[n]}\, e^{-j\Omega Tn}$$

$$\text{DTFT} \begin{cases} x[n] = x_c(nT) \\ X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j\omega n} \end{cases} \longrightarrow \underline{X_s(j\Omega)} = X(e^{j\omega})\Big|_{\boxed{\omega=\Omega T}} = \underline{X(e^{j\Omega T})} \quad *$$

$$** \quad \underline{X_s(j\Omega)} = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c(j(\Omega-k\Omega_s))$$

$$**,\ * \Rightarrow X(e^{j\Omega T}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c(j(\Omega-k\Omega_s))$$

نحوه عملکرد $\frac{C}{D}$ (تبدیل پیوسته به گسسته) $X_c(j\Omega) \to X(e^{j\omega})$ در حوزه فرکانس:

$$\Omega_s = \frac{2\pi}{T} \qquad \begin{cases} \Omega T = \omega \\ \Omega = \frac{\omega}{T} \end{cases}$$

$$\boxed{X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c\left[j\left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T}\right)\right]}$$

① پریودیک سازی طیف پیوسته با Ω_s و جمع (در صورت هم‌پوشانی)

② ضریب دامنه $\frac{1}{T}$

③ Scale فرکانسی با $\omega = \Omega T$ (گسسته ← ω ، پیوسته ← Ω)

مثال: نمونه برداری و بازسازی سیگنال سینوسی:

$x_c(t) = \cos(4000\pi t)$

$X_c(j\Omega) = \pi[\delta(\Omega - 4000\pi) + \delta(\Omega + 4000\pi)]$

$\Omega_s \geq 2\Omega_N \geq 8000\pi$

$T = \frac{1}{6000}$

$\Omega_s = \frac{2\pi}{T} = 12000\pi \geq 2\Omega_N$

نرخ نایکوئیست را دارد ✓✓

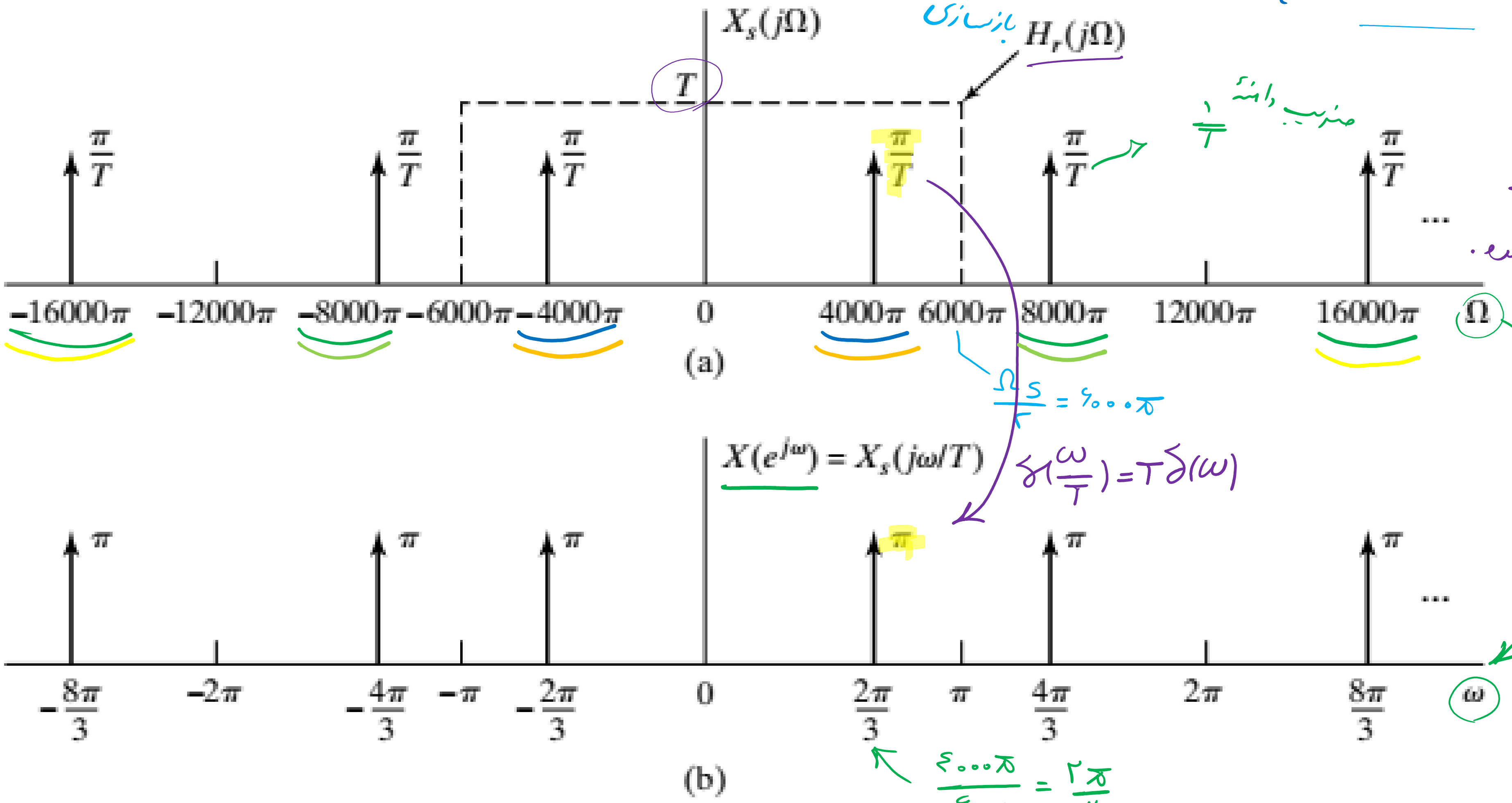


Figure 6 (a) Continuous-time and (b) discrete-time Fourier transforms for sampled cosine signal with frequency $\Omega_0 = 4000\pi$ and sampling period $T = 1/6000$.

مثال ۲: الیاسینگ در نمونه برداری از سیگنال سینوسی:

$x_c(t) = \cos(16000\pi t)$

$\boxed{T = \frac{1}{6000}}$ ××

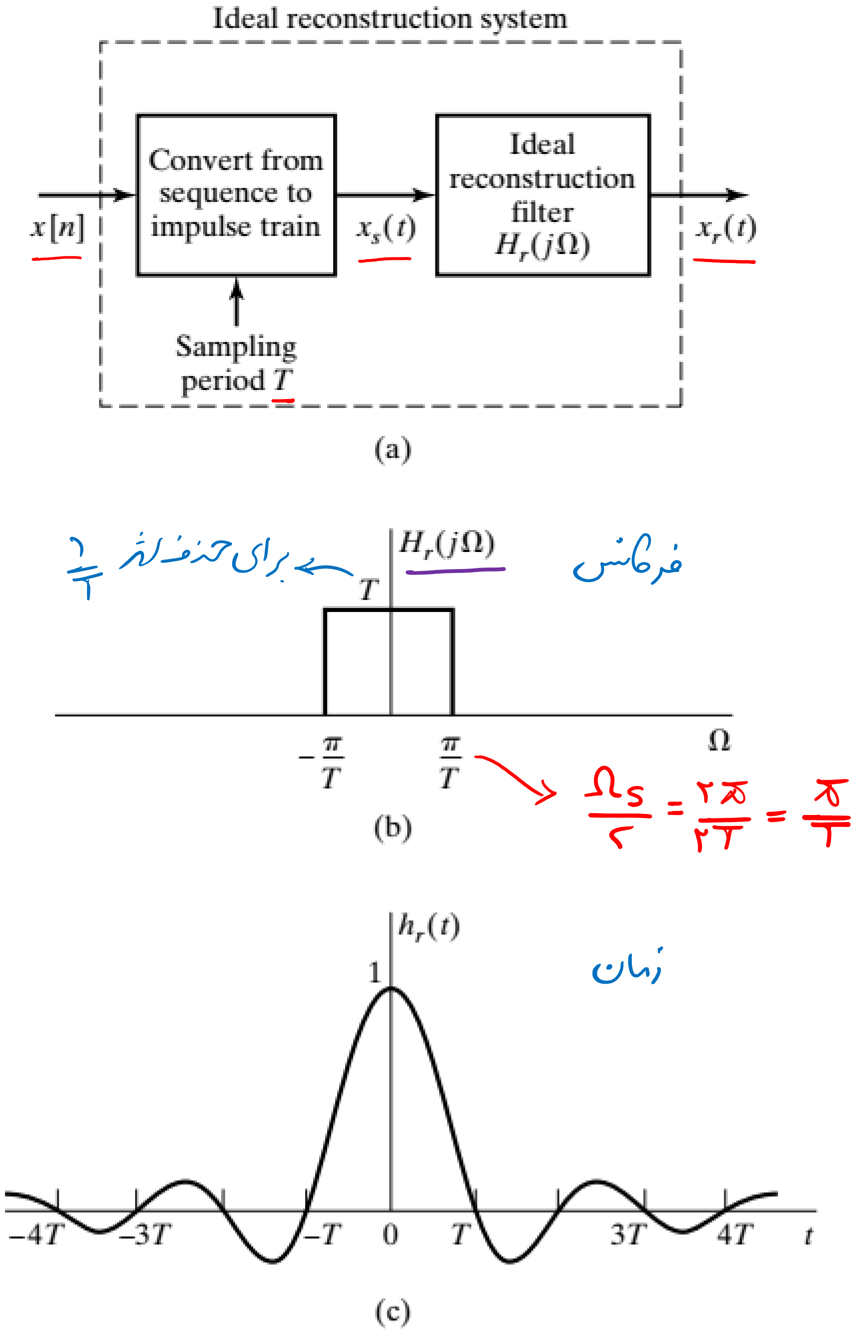
$\Omega_s = 12000\pi$

به دلیل عدم رعایت نرخ نایکوئیست، سیگنال بازسازی شده متفاوت از سیگنال اصلی

$\Omega_s \geq 2\Omega_N = 32000\pi$

$T = \frac{2\pi}{\Omega_s} = \frac{2\cancel{\pi}}{32000\cancel{\pi}} = \frac{1}{16000}$

- بازسازی سیگنال باند محدود از روی نمونه‌ها :



$\frac{1}{T}$ برای حذف اثر

فرکانس

$\frac{\Omega_s}{2} = \frac{2\pi}{2T} = \frac{\pi}{T}$

زمان

Figure 7 (a) Block diagram of an ideal bandlimited signal reconstruction system. (b) Frequency response of an ideal reconstruction filter. (c) Impulse response of an ideal reconstruction filter.

$x_r(t) = x_s(t) * h_r(t)$ زمان

$X_r(j\Omega) = X_s(j\Omega) H_r(j\Omega)$ فرکانس

$X_r(j\Omega)$ تبدیل به $X(e^{j\Omega T})$ است

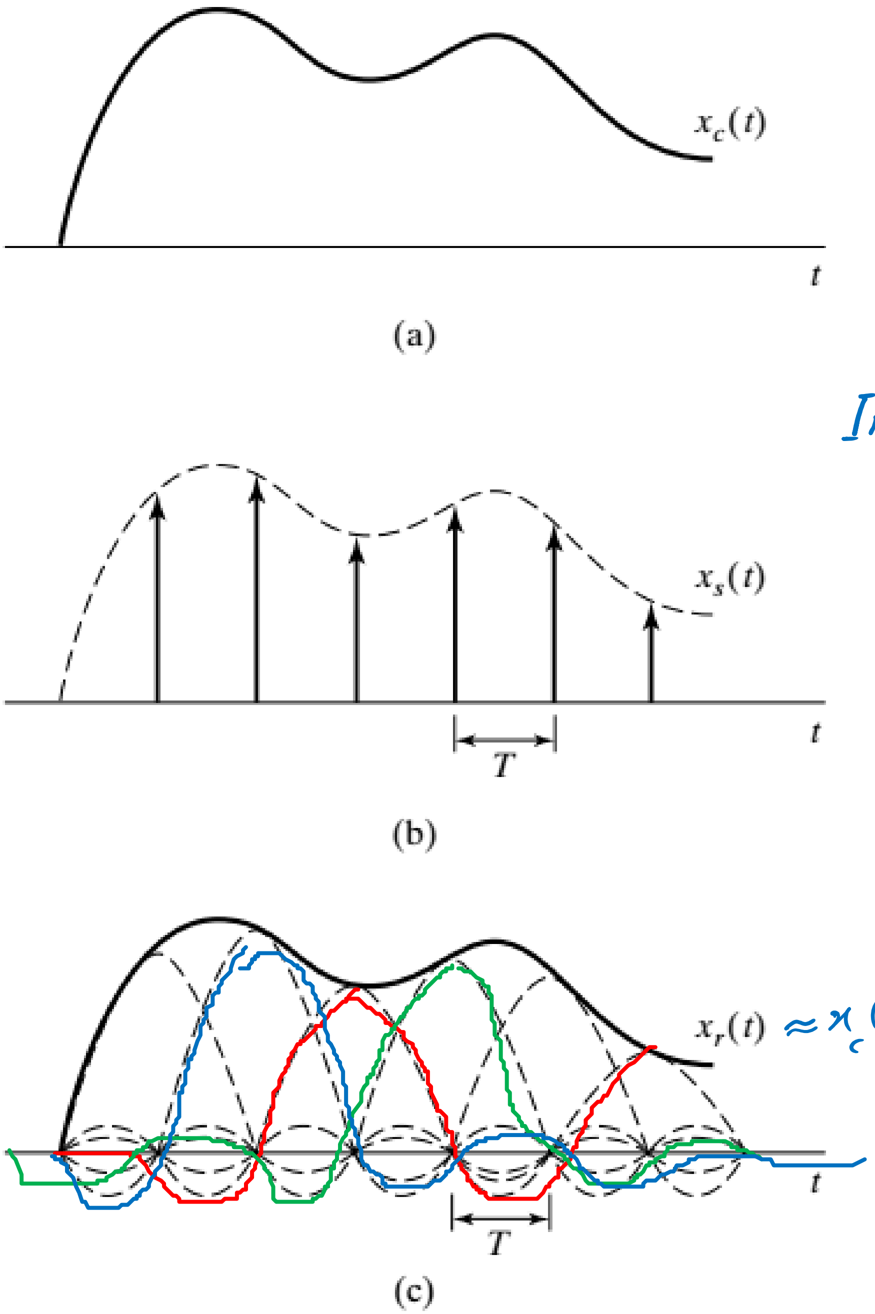
$* \Rightarrow X_r(j\Omega) = H_r(j\Omega) X(e^{j\Omega T})$

گام‌ها: (1) Scale فرکانسی با رابطهٔ $\Omega = \frac{\omega}{T}$

(2) ضریب دامنهٔ T

(3) اعمال فیلتر پایین‌گذر با فرکانس قطع $\Omega_c = \frac{\pi}{T}$

$$h_r(t) = \frac{\sin\left(\frac{\pi t}{T}\right)}{\frac{\pi t}{T}}$$



Interpolation

درونیابی

رابطهٔ (25)

$$\Rightarrow x_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \frac{\sin[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T}$$

Figure 8 Ideal bandlimited interpolation.

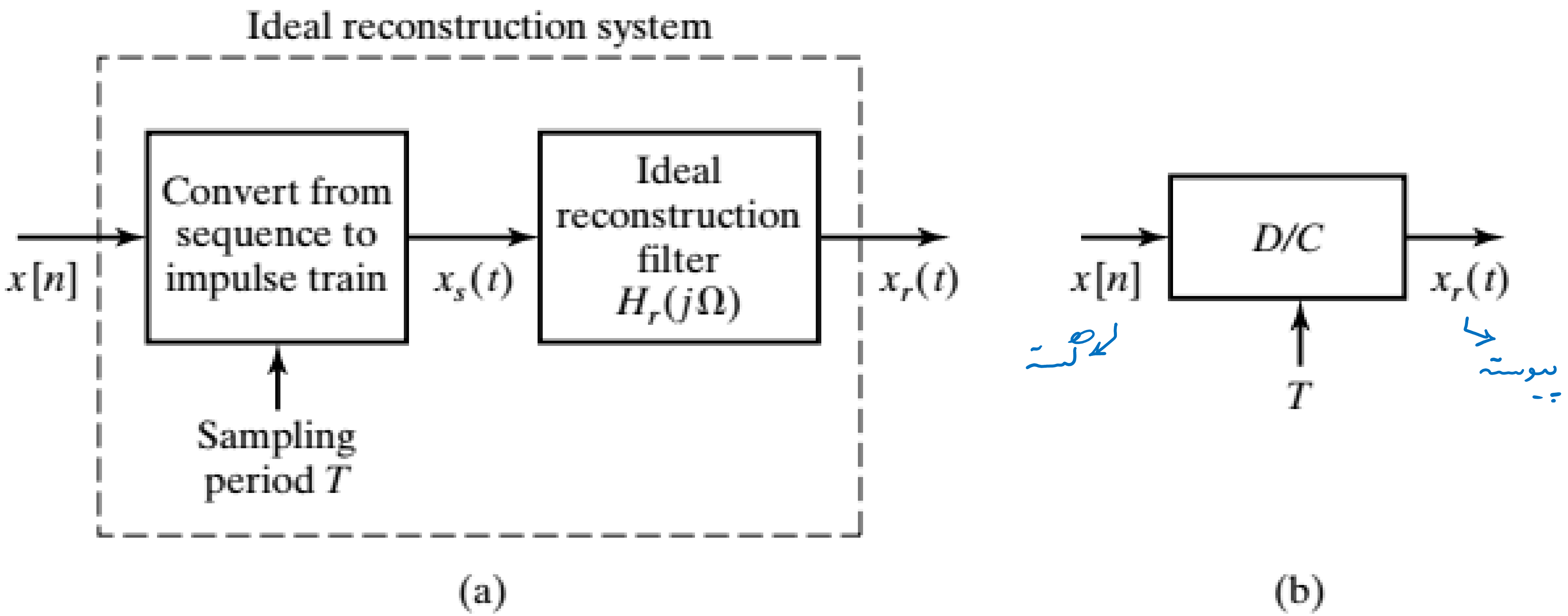


Figure 9 (a) Ideal bandlimited signal reconstruction. (b) Equivalent representation as an ideal D/C converter.

$$x_s(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\,\delta(t-nT)$$

$$*\, h_r(t)$$

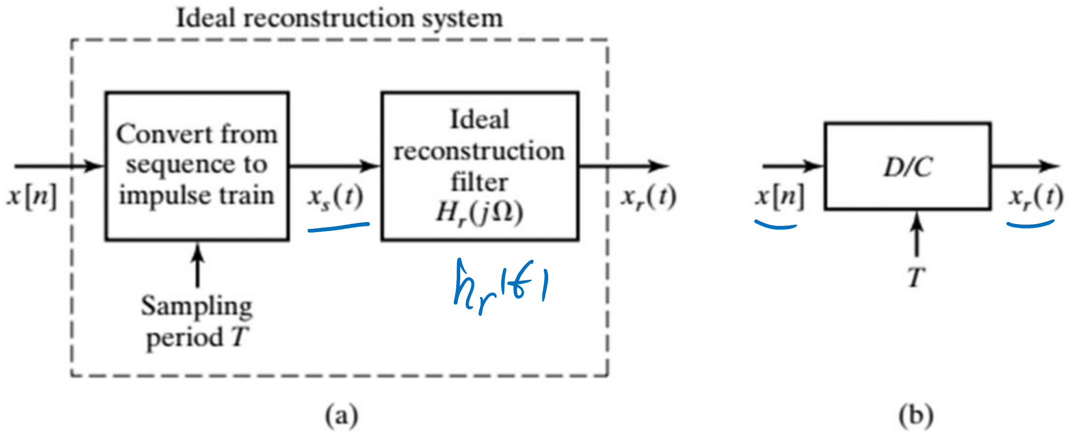


Figure 9 (a) Ideal bandlimited signal reconstruction. (b) Equivalent representation as an ideal D/C converter.

(23) $$x_r(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\,h_r(t-nT) \xrightarrow{F_t} X_r(j\Omega)=\underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\,H_r(j\Omega)\,e^{-j\Omega Tn}}_{X(e^{j\Omega T})}$$

$$\Rightarrow X_r(j\Omega)=H_r(j\Omega)\,X(e^{j\Omega T})$$

رابطه حوزه فرکانس D/C ایده‌آل

٤ - پردازش زمان گسسته سیگنالهای زمان پیوسته:

C/D

زمان $x[n] = x_c(nT)$

فرکانس $X(e^{j\omega}) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c\left(j\left(\frac{\omega}{T} - \frac{2\pi k}{T}\right)\right)$

D/C

زمان $y_r(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[n] \frac{\sin[\pi(t-nT)/T]}{\pi(t-nT)/T}$

فرکانس $Y_r(j\Omega) = H_r(j\Omega) Y(e^{j\Omega T}) = \begin{cases} T Y(e^{j\Omega T}) & ; |\Omega| < \frac{\pi}{T} \\ 0 & ; \text{o.w.} \end{cases}$

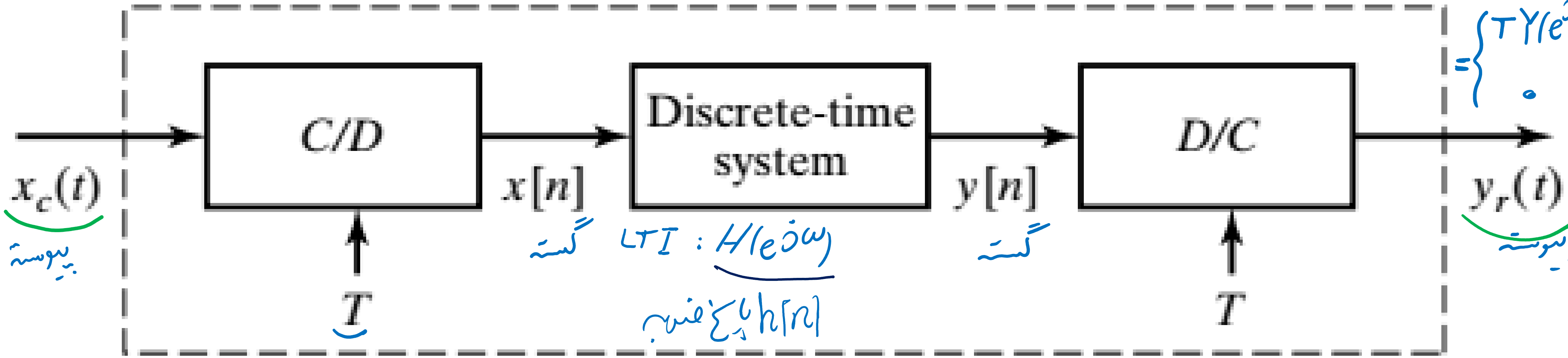


Figure 10 Discrete-time processing of continuous-time signals.

مثال ها: سیستم همانی $y[n] = x[n]$

→ LTI → کانولوشن $y[n] = x[n] * h[n]$

→ فرکانس $Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) X(e^{j\omega})$

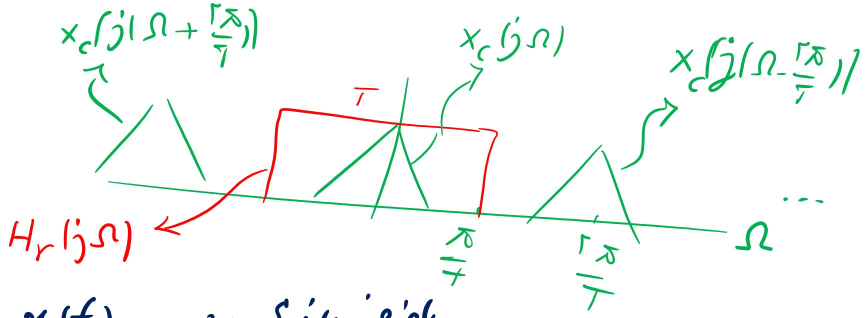
$D/C \rightarrow \quad Y_r(j\Omega) = H_r(j\Omega)\, Y(e^{j\Omega T}) \longrightarrow Y_r(j\Omega) = H_r(j\Omega) H(e^{j\Omega T}) \underbrace{X(e^{j\Omega T})}$

$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega}) X(e^{j\omega})$

$\omega = \Omega T$

$$\rightarrow Y_r(j\Omega) = \underbrace{H_r(j\Omega)} H(e^{j\Omega T}) \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_c\left[j\left(\Omega - \frac{2\pi k}{T}\right)\right]$$

$$H_r(j\Omega) = \begin{cases} T & ; |\Omega| < \frac{\pi}{T} \\ 0 & ; o.w. \end{cases}$$



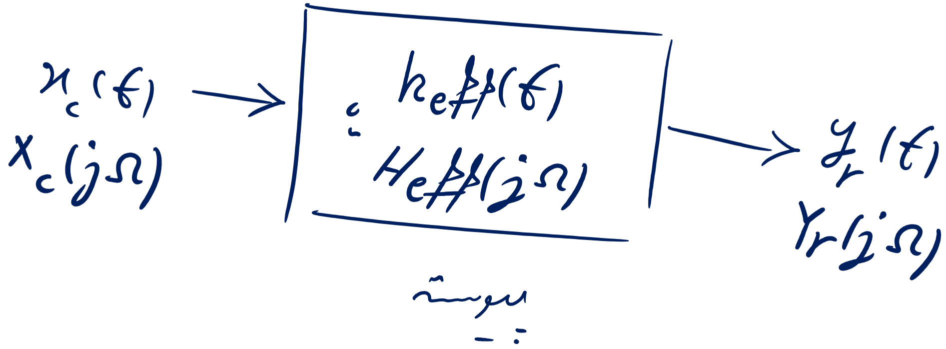
با فرض باند محدود بودن $x_c(t)$ داریم:

$X_c(j\Omega) = 0 \quad ; |\Omega| \geq \frac{\pi}{T}$

$$\rightarrow \underbrace{Y_r(j\Omega)} = \begin{cases} \underline{H(e^{j\Omega T})}\, \underbrace{X_c(j\Omega)} & ; |\Omega| < \frac{\pi}{T} \\ 0 & ; |\Omega| \geq \frac{\pi}{T} \end{cases}$$

$$\rightarrow Y_r(j\Omega) = H_{eff}(j\Omega) X_c(j\Omega)$$

$$\rightarrow \boxed{H_{eff}(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T}) & ; |\Omega| < \frac{\pi}{T} \\ 0 & ; |\Omega| \geq \frac{\pi}{T} \end{cases}}$$



مثال:

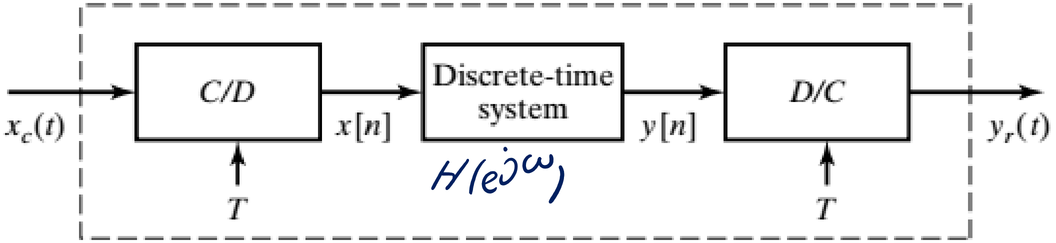
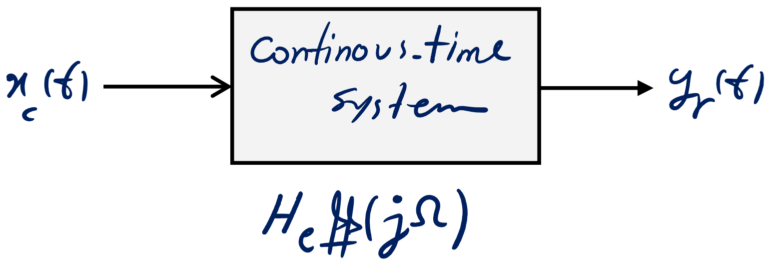


Figure 10 Discrete-time processing of continuous-time signals.



فیلتر پایین گذر

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 ; & |\omega|<\omega_c \\ 0 ; & \omega_c<|\omega|\leq\pi \end{cases}$$

$$H_{eff}(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T}) ; & |\Omega|<\frac{\pi}{T} \\ 0 ; & |\Omega|\geq\frac{\pi}{T} \end{cases}$$

$\omega = \Omega T$

$$\rightarrow H_{eff}(j\Omega) = \begin{cases} 1 ; & |\Omega T|<\omega_c \text{ یا } |\Omega|<\frac{\omega_c}{T} \\ 0 ; & |\Omega T|\geq\omega_c \text{ یا } |\Omega|\geq\frac{\omega_c}{T} \end{cases}$$

فیلتر پایین گذر با فرکانس قطع $\frac{\omega_c}{T}$:

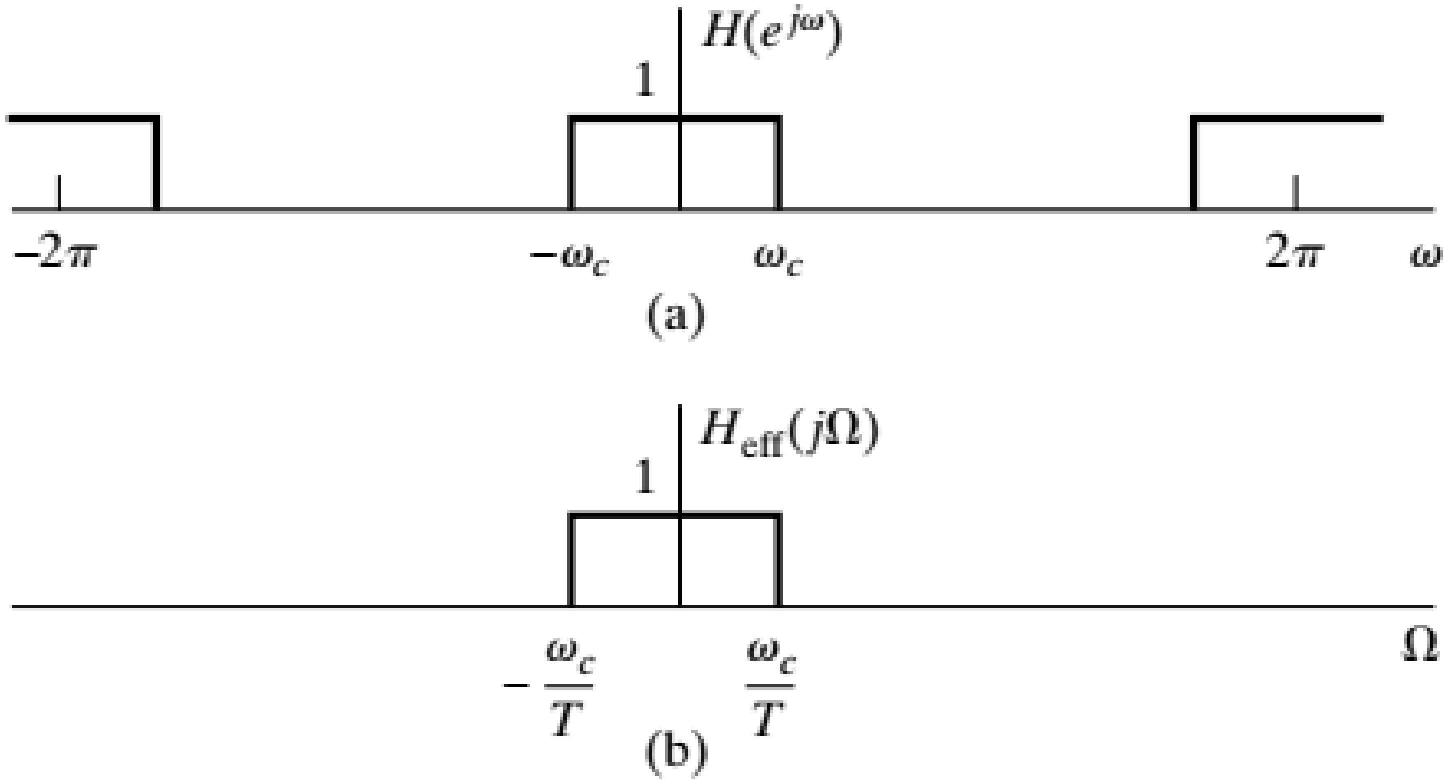


Figure 11 (a) Frequency response of discrete-time system in Figure 10. (b) Corresponding effective continuous-time frequency response for bandlimited inputs.

شرط نایکوییست $(2\pi - \Omega_N T) \geq \Omega_N T$

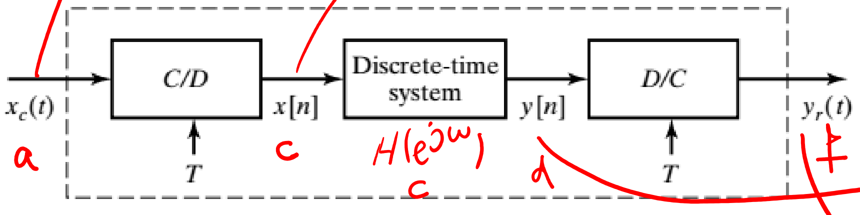


Figure 10 Discrete-time processing of continuous-time signals.

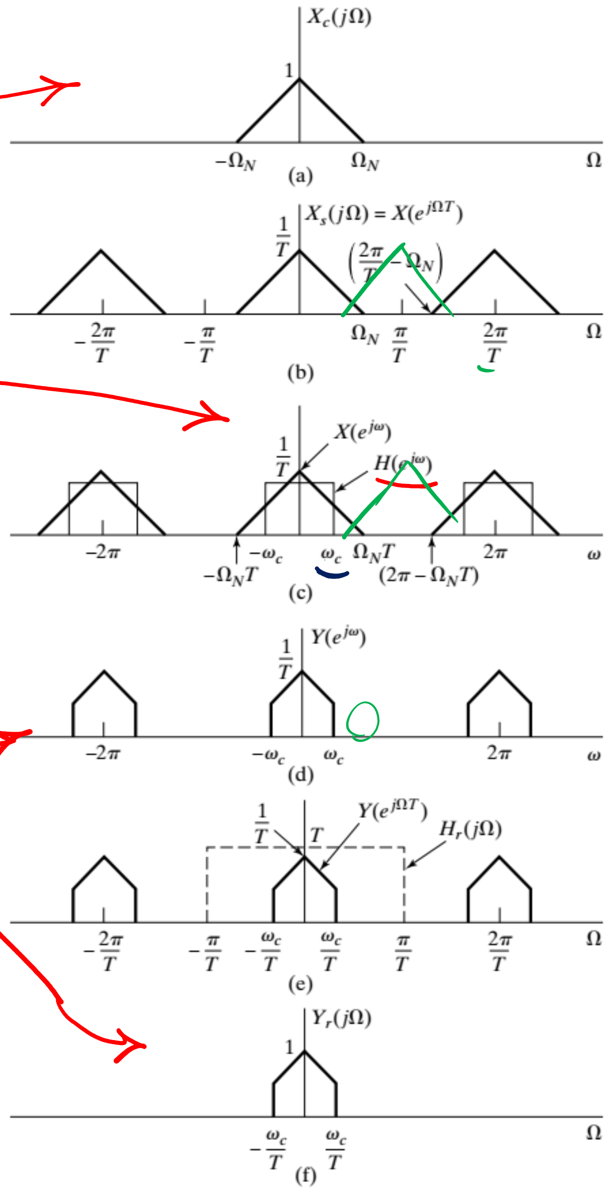
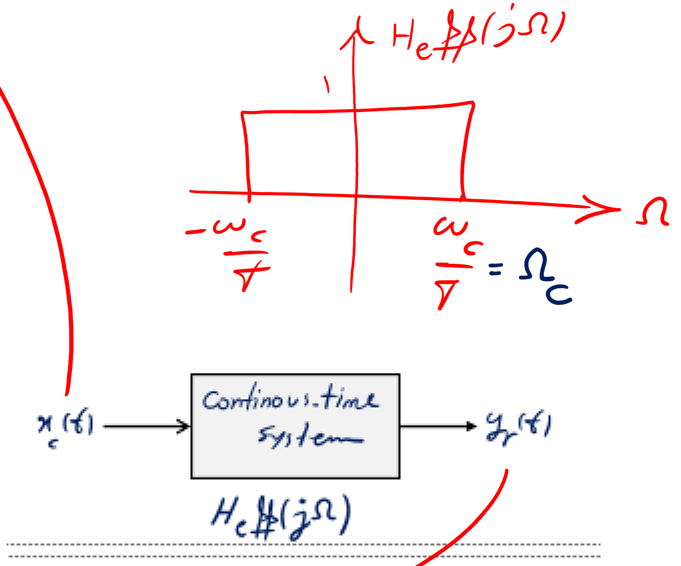


Figure 12 (a) Fourier transform of a bandlimited input signal. (b) Fourier trans form of sampled input plotted as a function of continuous-time frequency Ω (c) Fourier transform $X(e^{j\omega})$ of sequence of samples and frequency respons $H(e^{j\omega})$ of discrete-time system plotted versus ω. (d) Fourier transform of outpu of discrete-time system. (e) Fourier transform of output of discrete-time systen and frequency response of ideal reconstruction filter plotted versus Ω. (f) Fourie transform of output.



نکات :

① : $\boxed{\omega_c = \Omega_c T}$ یا $\Omega_c = \frac{\omega_c}{T}$

فرکانس قطع زمان گسسته

فرکانس قطع زمان پیوسته

② : تحت چه شرایطی ، $y_r(t) = x_c(t)$ خواهد شد؟

$$\boxed{\Omega_N T < \omega_c}$$

③ : اگر مقداری aliasing در شکل های b و c وجود داشته باشد به دلیل عملکرد $H(e^{j\omega})$ تاثیری در خروجی نخواهد داشت :

به عبارت دیگر : شرط عدم وجود aliasing در این مثال :

$(2\pi - \Omega_N T) \geq \omega_c$ ✓

مثال:

مشتق‌گیر ایده‌آل:

$$y_c(t) = \frac{d}{dt}[x_c(t)]$$

$$\xrightarrow{F} \quad H_c(j\Omega) = j\Omega$$

اگر سیگنال باندمحدود باشد:

$$* \; H_{eff}(j\Omega) = \begin{cases} j\Omega & ; \ |\Omega| < \frac{\pi}{T} \\ 0 & ; \ |\Omega| \geq \frac{\pi}{T} \end{cases}$$

اگر بخواهیم این سیستم را با یک سیستم پردازش زمان گسسته پیاده‌سازی کنیم. $H(e^{j\omega})$ را به دست آوریم.

$$H(e^{j\Omega T}) = j\Omega \xrightarrow{\Omega = \frac{\omega}{T}}$$

$$\left| H(e^{j\omega}) = j\frac{\omega}{T} \; ; \; |\omega| < \pi \right|$$

Eq.(47) رابطه حوزه زمان در کتاب

$$* \; H_{eff}(j\Omega) = \begin{cases} H(e^{j\Omega T}) & ; \ |\Omega| < \frac{\pi}{T} \\ 0 & ; \ |\Omega| \geq \frac{\pi}{T} \end{cases}$$

$H_{eff}(j\Omega)$

$H(e^{j\omega})$

$\omega = \Omega T$

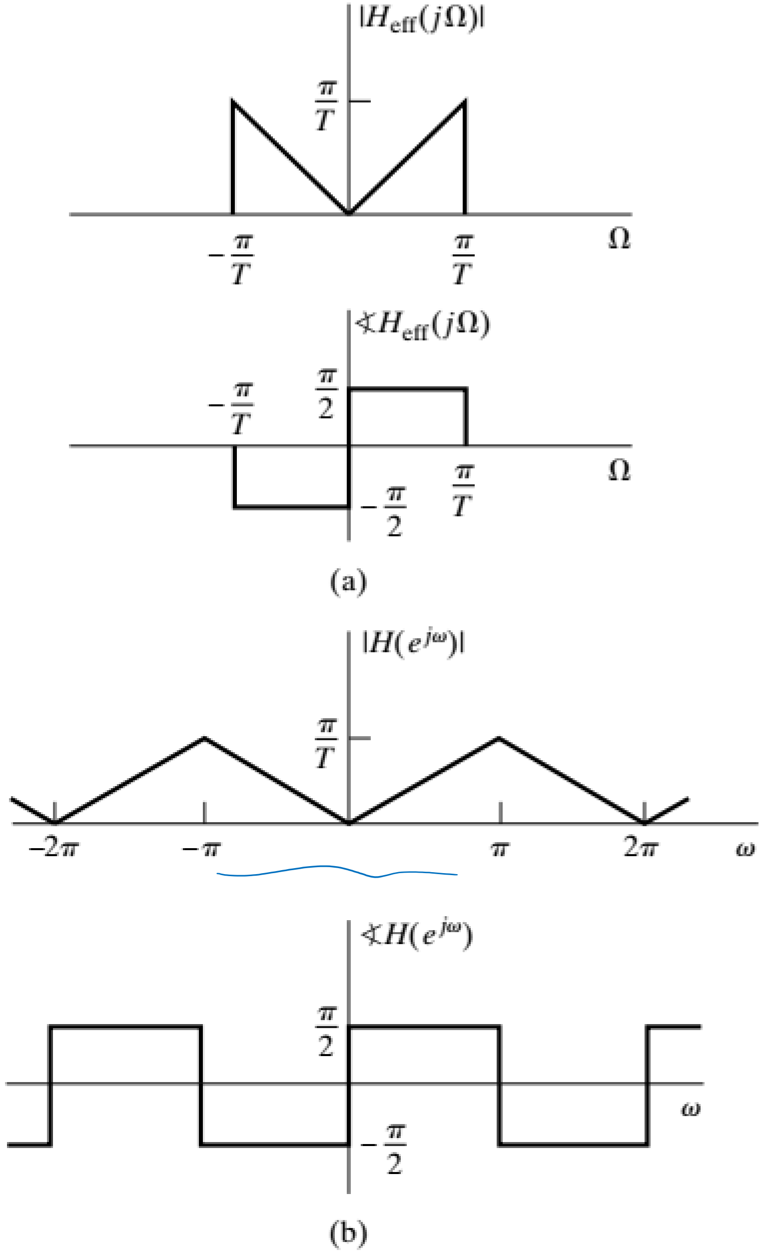


Figure 13 (a) Frequency response of a continuous-time ideal bandlimited differentiator $H_c(j\Omega) = j\Omega$, $|\Omega| < \pi/T$. (b) Frequency response of a discrete-time filter to implement a continuous-time bandlimited differentiator.

4.2

"Impulse Invariance" — پاسخ ضربه / بدون تغییر

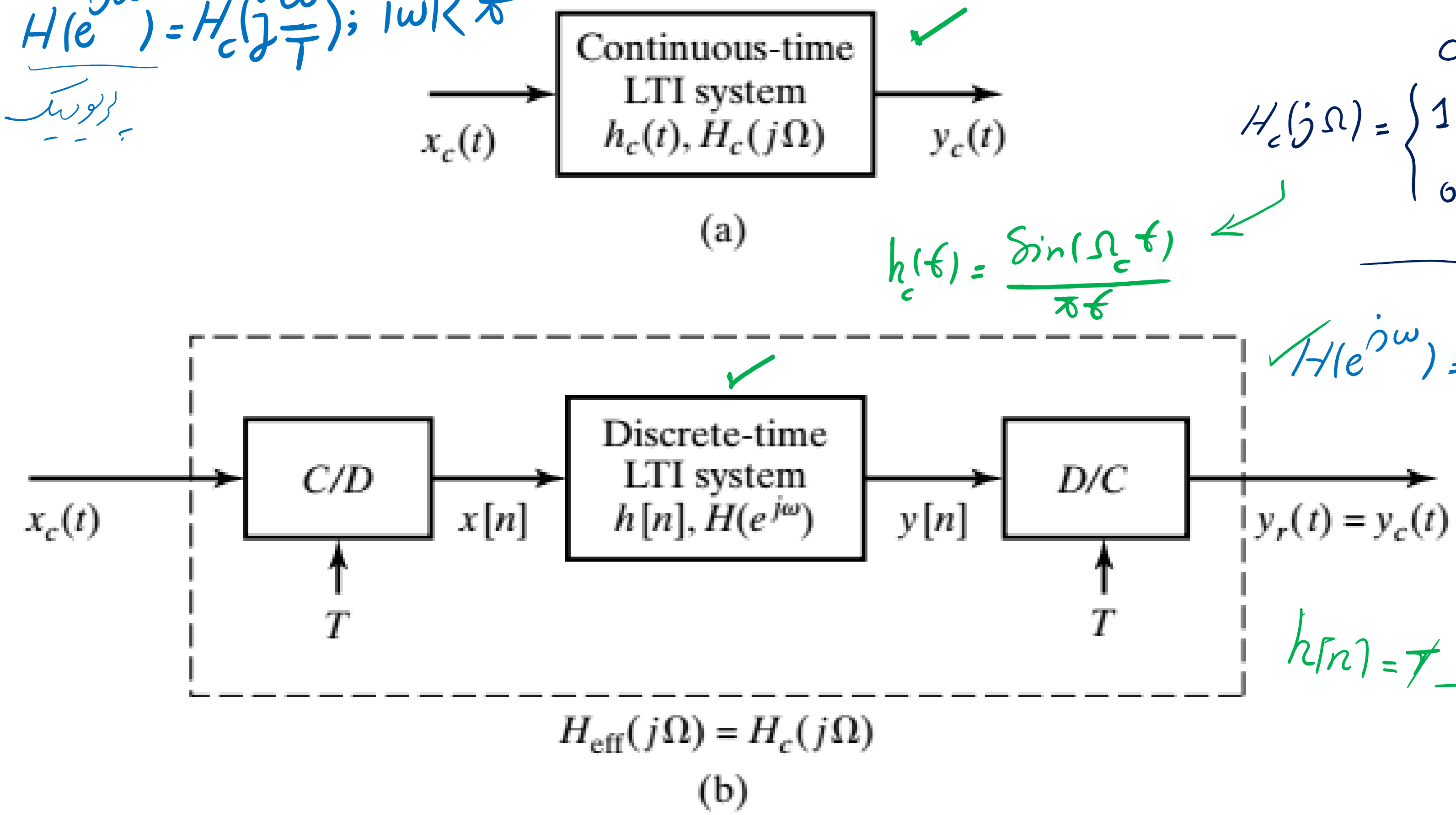
: شکل پاسخ ضربه در حالت زمان پیوسته و زمان گسسته یکسان است.

زمان $\quad h[n] = T h_c(nT)$

پاسخ ضربه سیستم زمان گسسته نسخهٔ نمونه برداری شده با مقیاس دامنهٔ T از $h_c(t)$ است.

فرکانس: $\underline{H(e^{j\omega})} = H_c\left(j\frac{\omega}{T}\right);\ |\omega|<\pi$

پریودیک با پریود 2π



مثال: فیلتر پایین گذر ایده‌آل

$$H_c(j\Omega) = \begin{cases} 1 ; & |\Omega| < \Omega_c \\ 0 ; & |\Omega| \geq \Omega_c \end{cases}$$

$$h_c(t) = \frac{\sin(\Omega_c t)}{\pi t}$$

$$H(e^{j\omega}) = \begin{cases} 1 ; & |\omega| < \omega_c \\ 0 ; & \omega_c \leq |\omega| < \pi \end{cases}$$

$$\omega_c = \Omega_c T$$

$$h[n] = \cancel{T} \frac{\sin(\overbrace{\Omega_c n T}^{\omega_c})}{\pi n \cancel{T}} = \frac{\sin(\omega_c n)}{\pi n}$$

Figure 14 (a) Continuous-time LTI system. (b) Equivalent system for bandlimited inputs.

مثال : سیستم زمان پیوسته با تابع سیستم گویا :

پیوسته

$$h_c(t) = A e^{s_0 t} u(t)$$

$$\mathcal{L}: \quad H_c(s) = \frac{A}{s - s_0} \quad ; \quad Re\{s\} > Re\{s_0\}$$

هدف : معادل زمان گسسته سیستم بالا را به دست آورید :

$$h[n] = T h_c(nT) = AT e^{s_0 T n} u[n]$$

$$\mathcal{Z}: \quad H(z) = \frac{AT}{1 - e^{s_0 T} z^{-1}} \quad ; \quad |z| > |e^{s_0 T}|$$

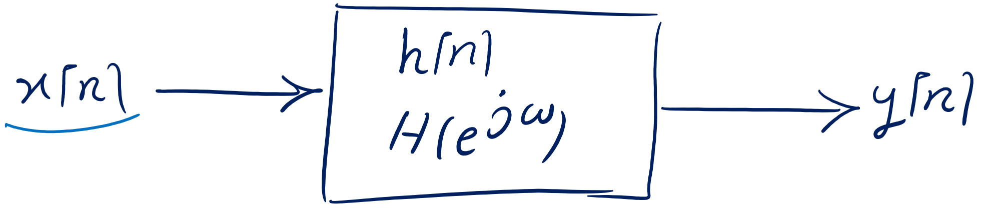
شرط وجود تبدیل فوریه

$Re\{s_0\} < 0$

$z = e^{j\omega}$

$$H(e^{j\omega}) = \frac{AT}{1 - e^{s_0 T} e^{-j\omega}}$$

5- پردازش زمان پیوسته سیگنالهای زمان گسسته :



$$\begin{cases} H(e^{j\omega}) = H_c\left(j\frac{\omega}{T}\right) \quad ; \quad |\omega| < \pi \\ H_c(j\Omega) = H(e^{j\Omega T}) \quad ; \quad |\Omega| < \frac{\pi}{T} \end{cases}$$

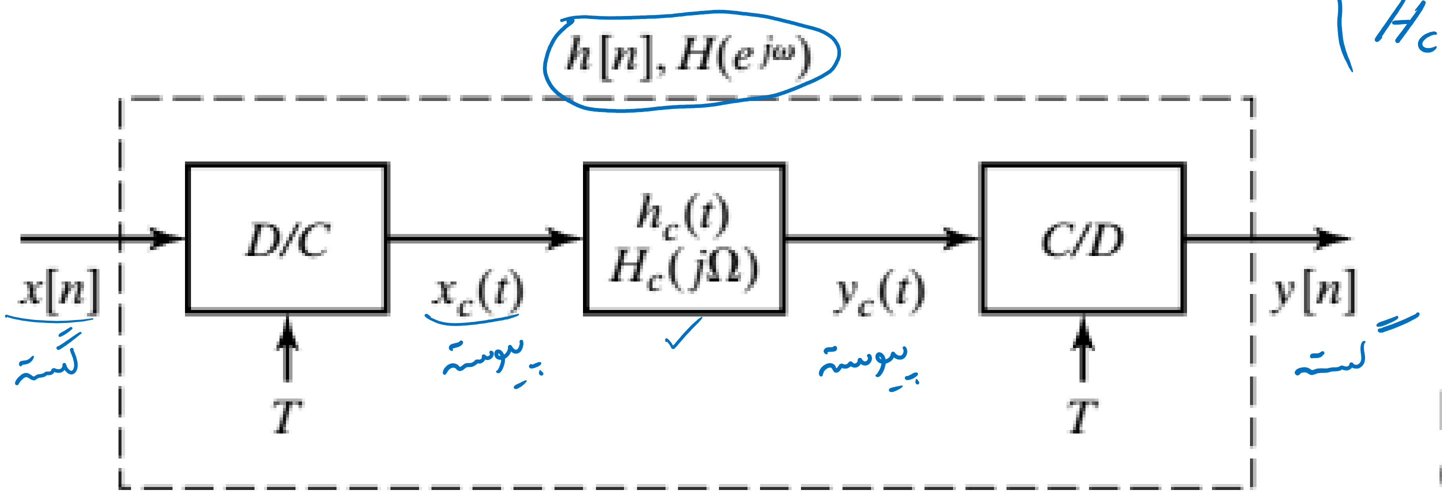


Figure 15 Continuous-time processing of discrete-time signals.

مثال :

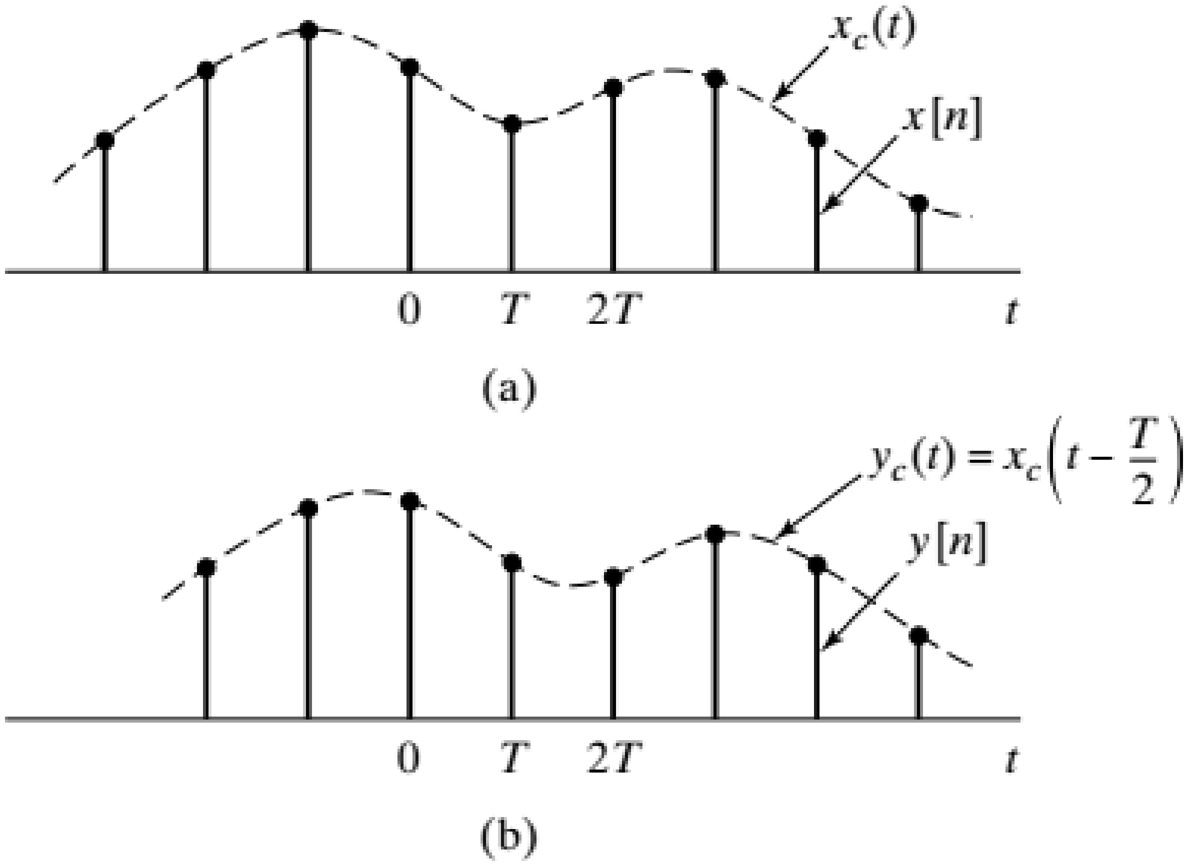
$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega\Delta} \quad ; \quad |\omega| < \pi$$

F^{-1}: اگر Δ صحیح باشد : $y[n] = x[n-\Delta]$

$$H_c(j\Omega) = H(e^{j\Omega T}) = e^{-j\Omega T\Delta}$$

F_t^{-1}: $y_c(t) = x_c(t - T\Delta)$

در دنیای نمونه های $x[n]$



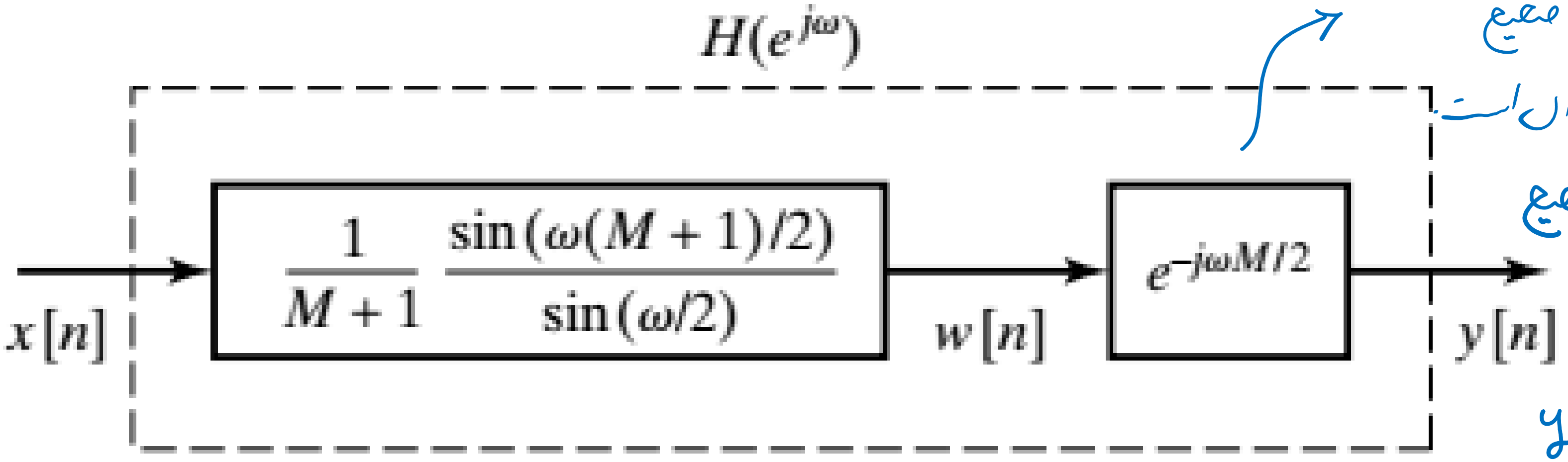
اگر Δ غیرصحیح باشد:

مثلاً $\Delta = \frac{1}{2}$

Figure 16 (a) Continuous-time processing of the discrete-time sequence (b) can produce a new sequence with a "half-sample" delay.

مثال: سیستم میانگین متحرک:

رابطه (66)



تأخیر

اگر M عدد زوج باشد: $\frac{M}{2}$ صحیح خواهد بود و سیستم تأخیر ایده‌آل است

ولی اگر M فرد باشد: $\frac{M}{2}$ غیر صحیح مثل قبل

$y[n] = w[n - \frac{M}{2}]$

Figure 17 The moving-average system represented as a cascade of two systems.

$M = 5 \rightarrow \quad y[n] = 0.308\cos[0.25\pi(n-2.5)]$

$\frac{MT}{2}$ در زمان پیوسته

x[n] = cos(۰,۲۵πn)

M = ۵

y[n] = ۰,۳۰۸ cos(۰,۲۵π(n-۲,۵))

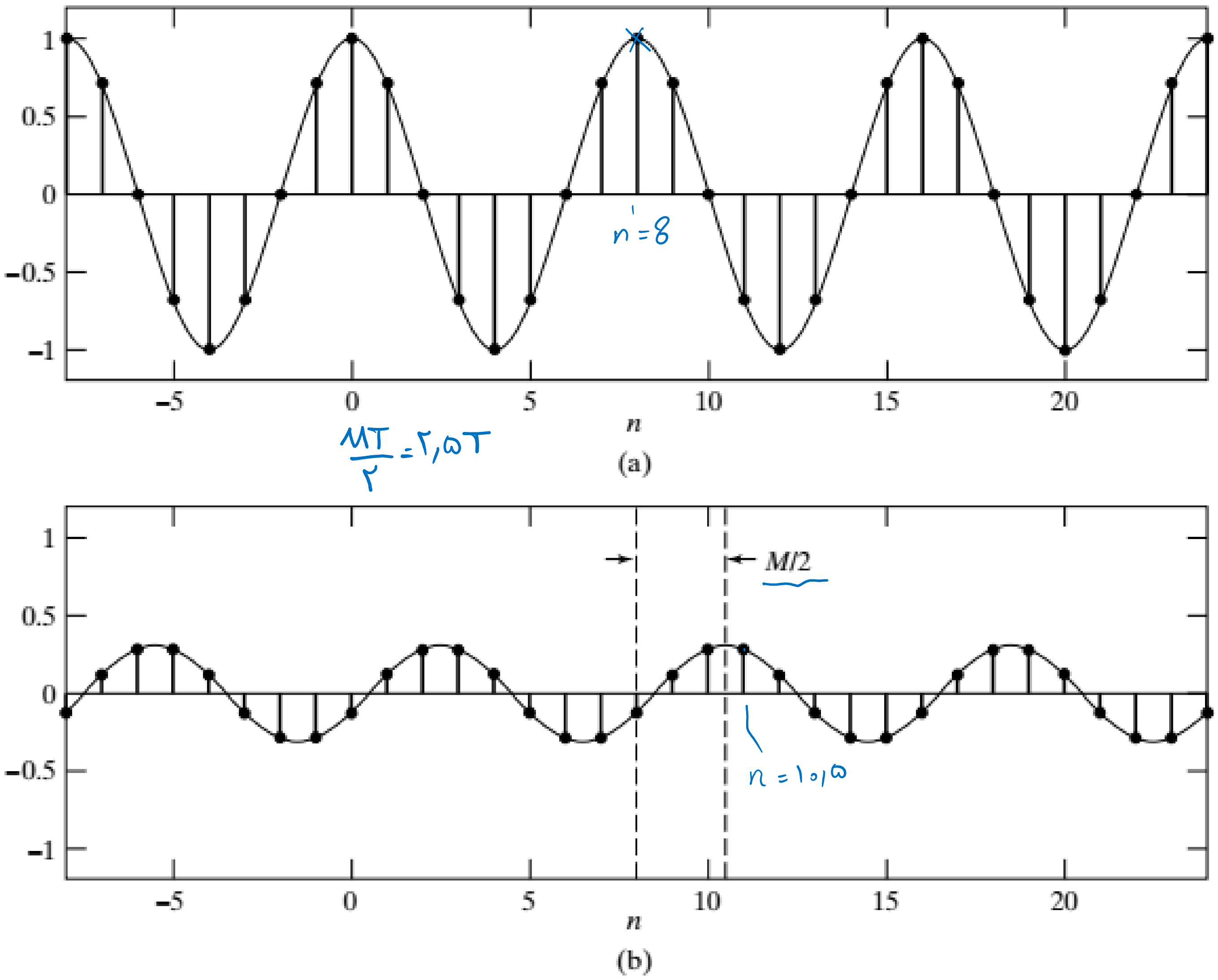


Figure 18 Illustration of moving-average filtering. (a) Input signal $x[n] = \cos(0.25\pi n)$. (b) Corresponding output of six-point moving-average filter.

6: تغییر نرخ نمونه‌برداری با پردازش زمان گسسته:

Sampling Rate

$x[n] = x_c(nT)$ نمونه‌برداری

نرخ نمونه‌برداری $\frac{1}{T}$

نرخ نمونه‌برداری $\frac{1}{T'}$ ؛ $T' \neq T$

$T' > T$ نرخ کمتر

$T' < T$ نرخ بیشتر

$x'[n] = x_c(nT')$

هدف: به دست آوردن $x'[n]$ از روی نمونه‌های $x[n]$

راه حل ساده: $x[n] \to \boxed{D/C} \to x_c(t) \to \boxed{C/D} \to x'[n]$ (T و T')

مطلوب نیست، فیلتر بازسازی ایده‌آل نیست.

$\boxed{4.6.1}$: کاهش نرخ نمونه‌برداری با یک ضریب صحیح:

Downsampling

$T' = MT$

صحیح و بیشتر

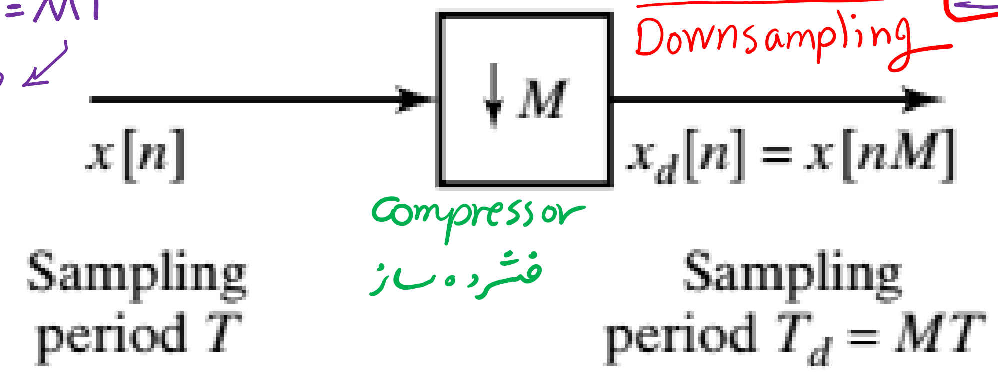
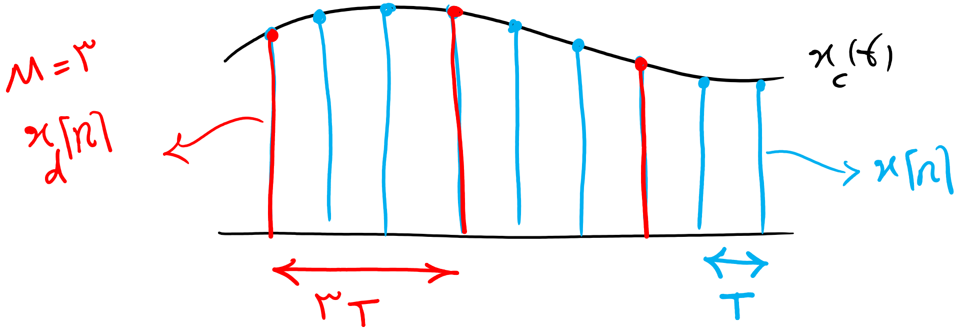


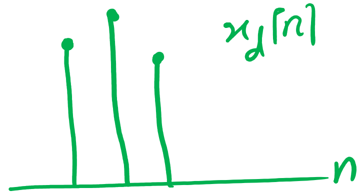
Figure 19 Representation of a compressor or discrete-time sampler.

← به دنبال روش‌هایی هستیم که تنها از پردازش زمان گسسته استفاده کنند.

نرخ نمونه‌برداری $\frac{1}{3}$ حالت قبل شد.



زمان فشرده



مثال :

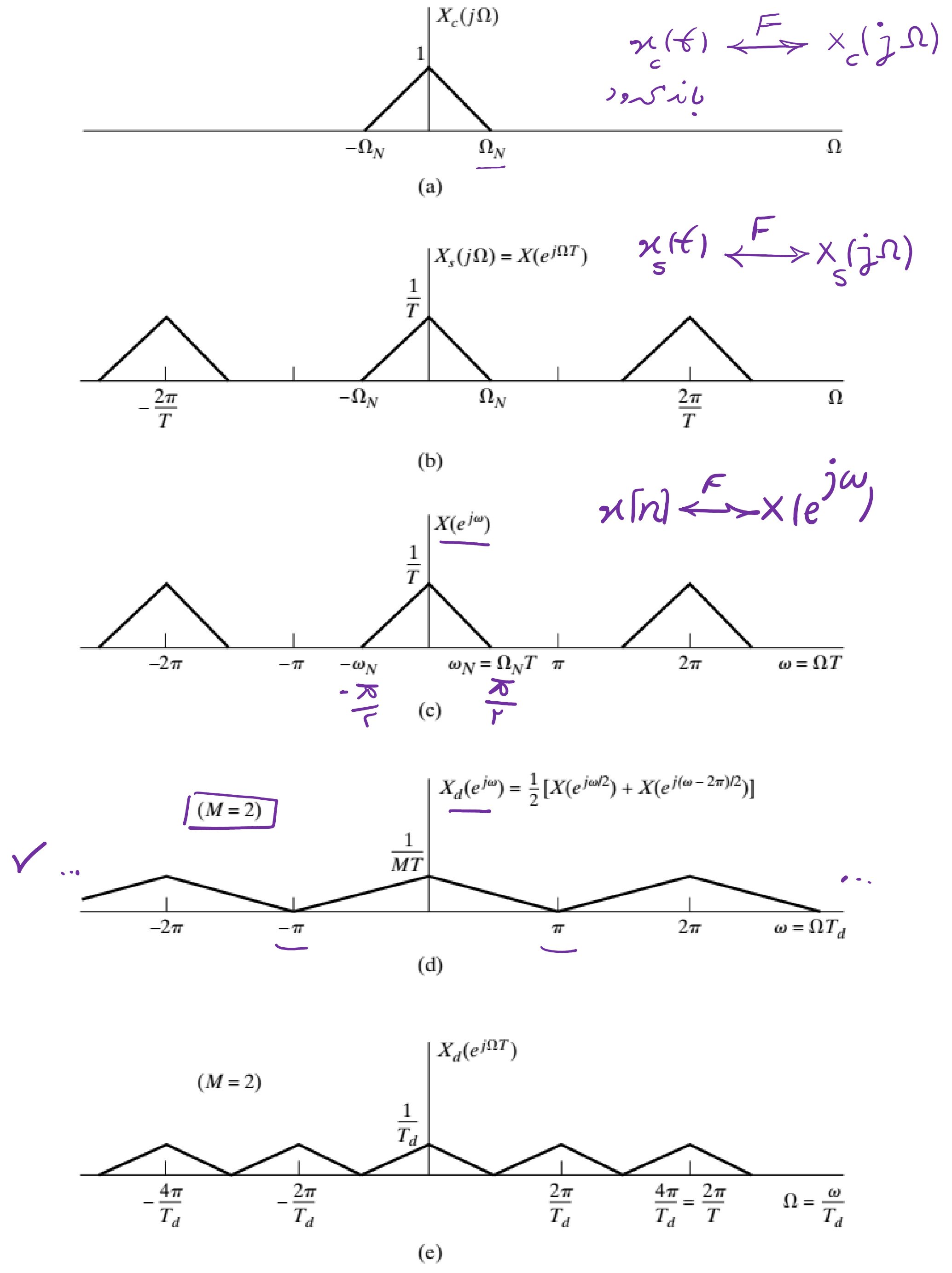


Figure 20 Frequency-domain illustration of downsampling.

فرکانس گسترش

$M = 2$

فشرده شدن در حوزهٔ زمان

↕

گسترده شدن در حوزهٔ فرکانس

تحلیل سیستم فشرده ساز :

حوزهٔ زمان : $x_d[n] = x[Mn]$

حوزهٔ فرکانس : $X_d(e^{j\omega}) = \frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M-1} X\left(e^{j\left(\frac{\omega}{M} - \frac{2\pi i}{M}\right)}\right)$

اثبات روابط 71 ~ 77 کتاب

گام‌های به دست آوردن $X_d(e^{j\omega})$ فشرده ساز در حوزهٔ فرکانس :

۱- گسترش محدودهٔ فرکانسی $|\omega| \le \pi$ با ضریب M

۲- پریودیک سازی با 2π و جمع

۳- ضریب دامنهٔ $\frac{1}{M}$

*

مثال قبل برای $M = 3$

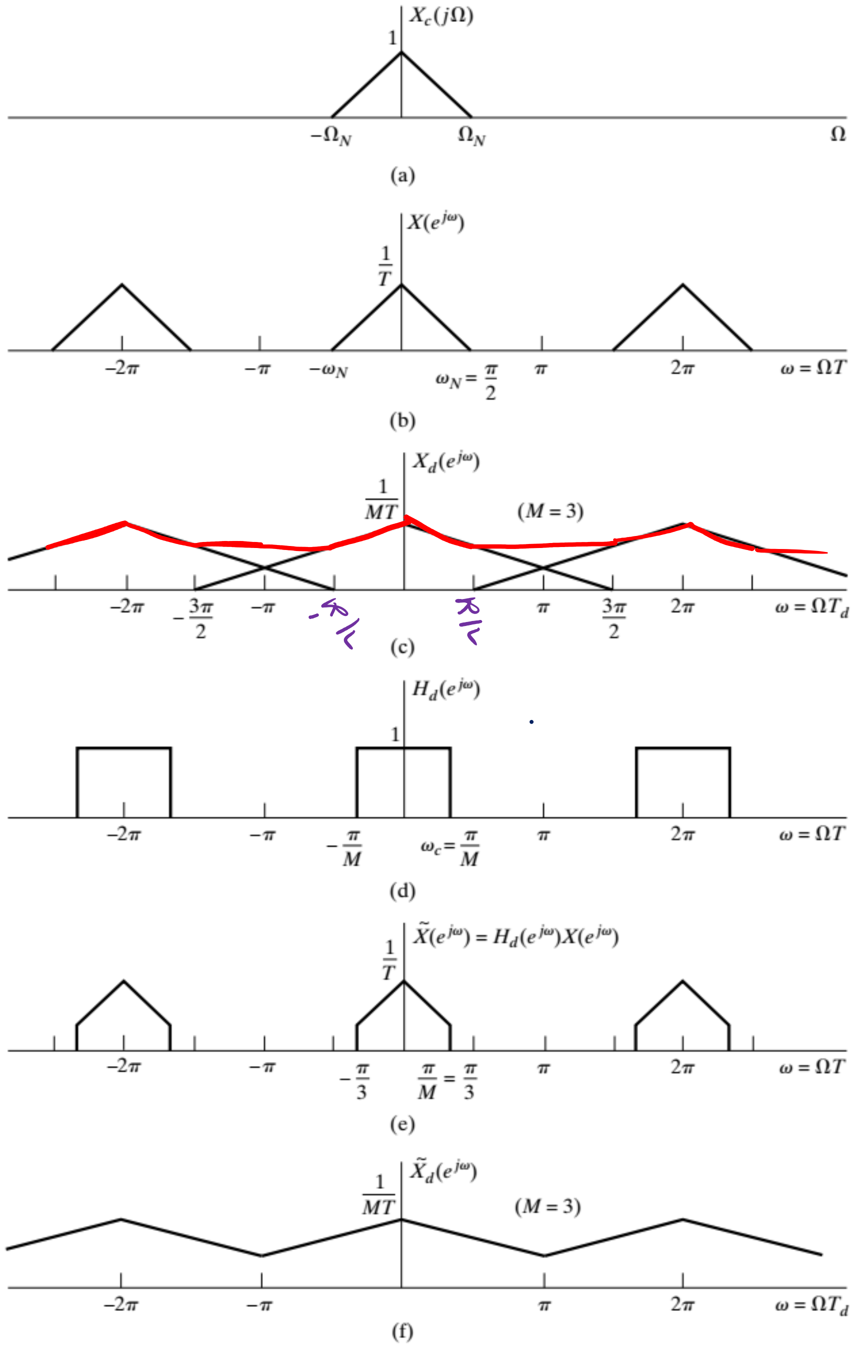


Figure 21 (a)–(c) Downsampling with aliasing. (d)–(f) Downsampling with prefiltering to avoid aliasing.

decimation فیلتر LPF

فشرده ساز

$$2\pi - \frac{3\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$$

$$-2\pi + \frac{3\pi}{2} = \frac{-\pi}{2}$$

مشکل فشرده ساز:

احتمال از دست رفتن اطلاعات aliasing

مانند آنچه در C/D داشتیم.

راه حل مشکل aliasing در فشرده ساز: decimation

بهبود

فیلتر پایین گذر با کم کردن بازه فرکانسی $X(e^{j\omega})$ از بروز aliasing جلوگیری می کند.

کدام بهتر است؟ حالت (d) با فیلتر بهتر است زیرا در این حالت محدوده فرکانسی بیشتری دست نخورده باقی مانده است.

در هر دو حالت از دست رفتن اطلاعات داریم.

از دست رفتن اطلاعات:

در حالت اول: از aliasing

" " دوم: از فیلتر کردن ✓ بهتر

Decimation:

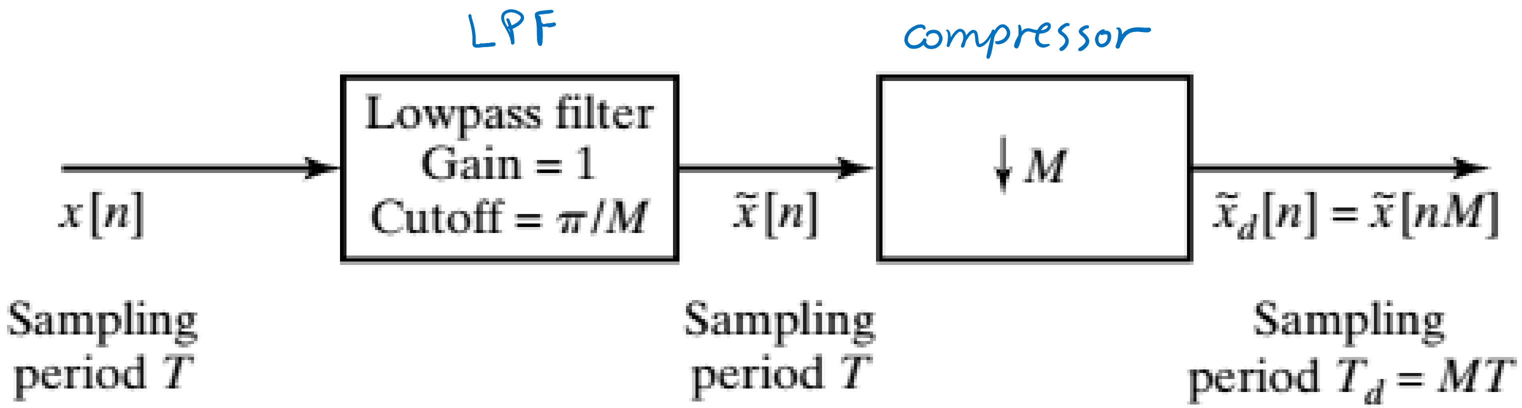
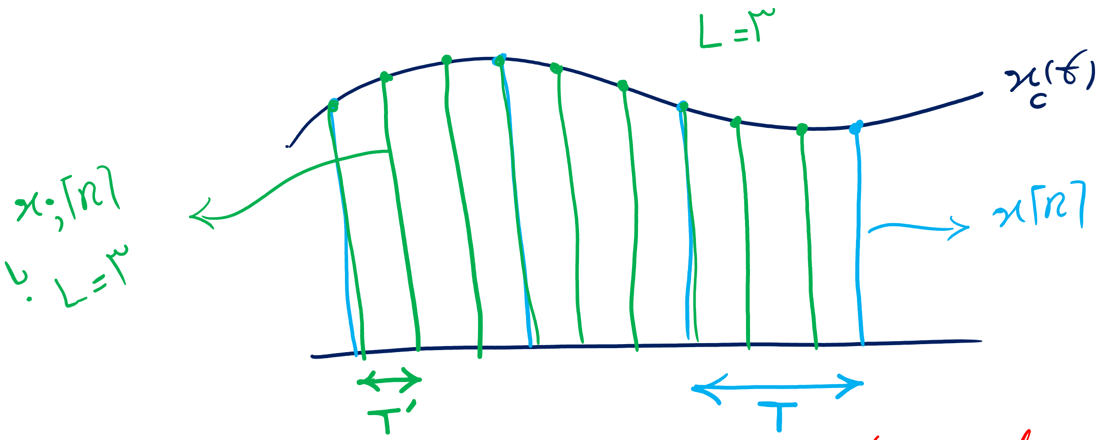


Figure 22 General system for sampling rate reduction by M.

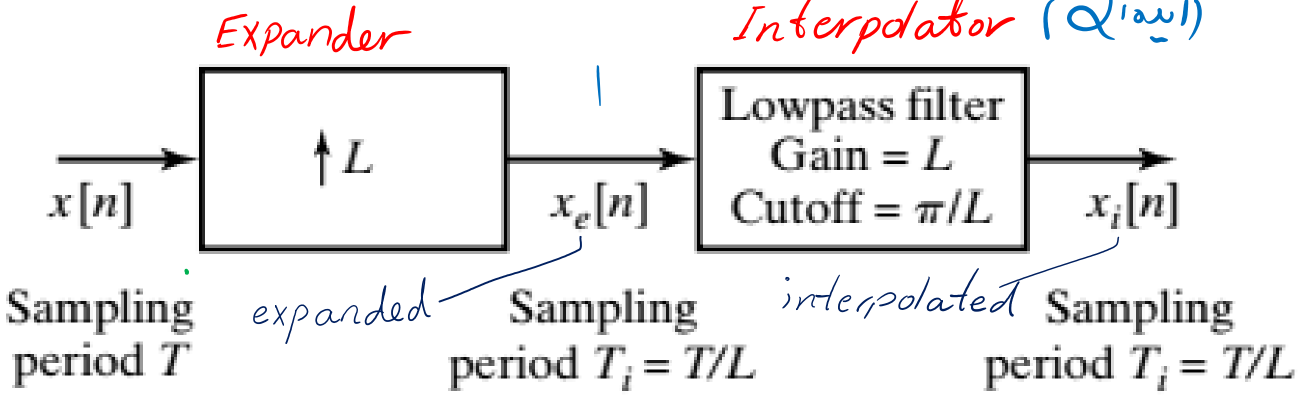
4.6.2 افزایش نرخ نمونه‌برداری با یک ضریب صحیح: Upsampling

$T' = \frac{T}{L}$



Interpolation نیازمند عملیات درونیابی

شبیه به D/C بازیابی سیگنال



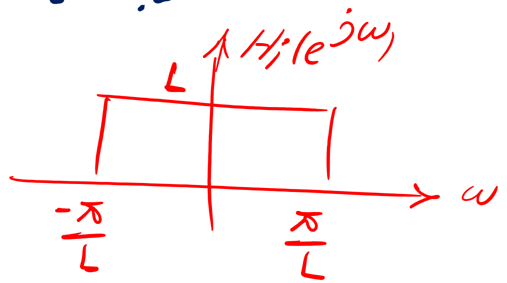
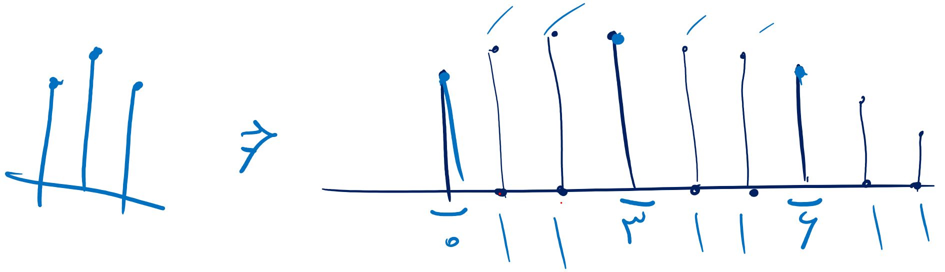


Figure 23 General system for sampling rate increase by L.

حوزه زمان: $x_e[n] = \begin{cases} x[\frac{n}{L}], & n = 0, \pm L, \pm 2L, \dots \\ 0, & o.w \end{cases}$ تبیین سیستم Expander

$x_e[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\delta[n-kL]$



حوزه فرکانس: فشرده‌کردن محور ω با ضریب L

$X_e(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,\delta[n-kL]\right)e^{-j\omega n} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,e^{-j\omega kL} = X(e^{j\omega L})$

مثال

گسترده شدن در حوزه زمان

فشرده شدن در حوزه فرکانس

$x_c(t) \xleftrightarrow{F} X_c(j\Omega)$

$x[n] \xleftrightarrow{F} X(e^{j\omega})$

فشرده کردن با ضریب L

آیا از دست رفتن اطلاعات ممکن است رخ دهد؟

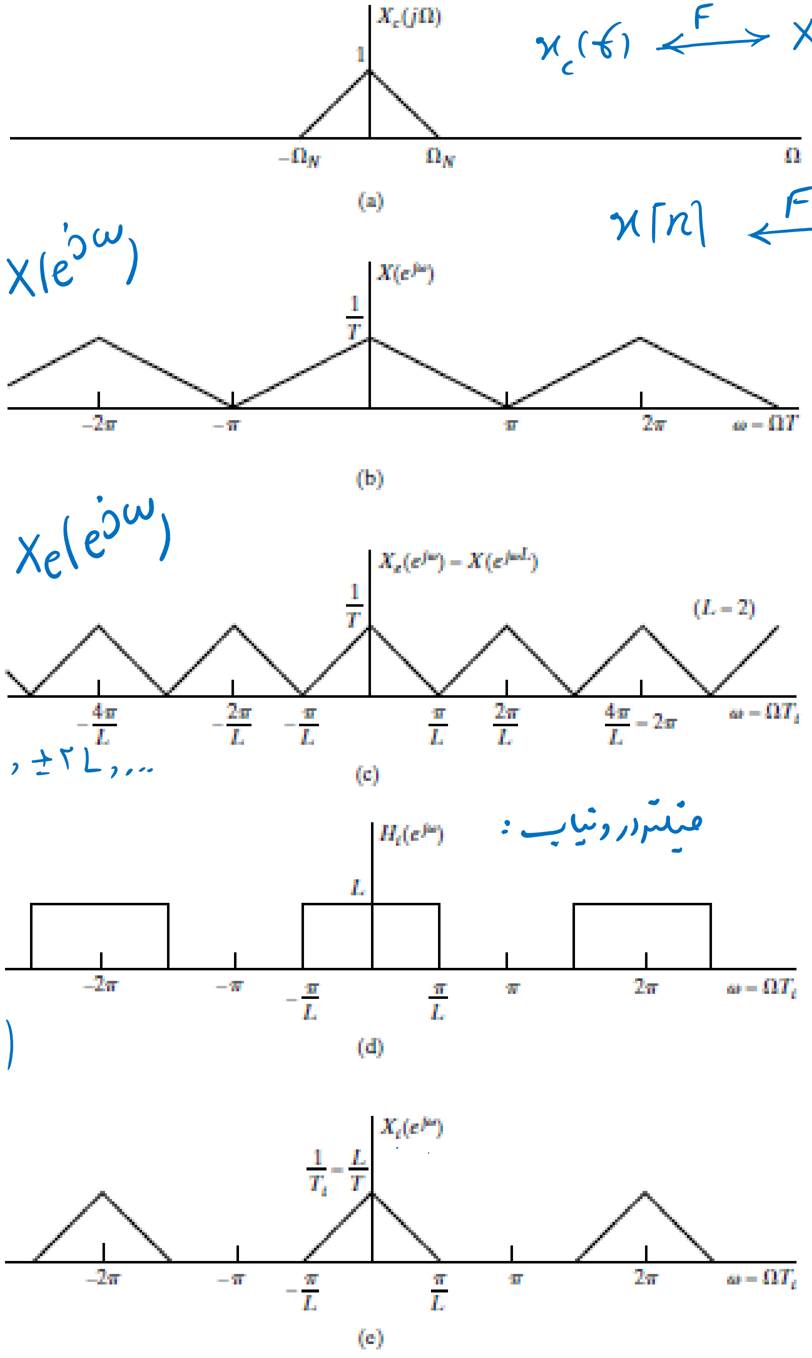


Figure 24 Frequency-domain illustration of interpolation.

فیلتر درونیاب :

$$h_i[n] = \frac{\sin(n\pi/L)}{n\pi/L} = \begin{cases} 0 \;; & n = \pm L, \pm 2L, \ldots \\ 1 \;; & n = 0 \end{cases}$$

$$x_i[n] = x[n] * h_i[n]$$

$$= x\left[\frac{n}{L}\right] = x_c\left(\frac{nT}{L}\right) = x_c(nT_i)$$

4.6.3 : فیلترهای درونیاب ساده و عملی :

جایگزین فیلتر ایده‌آل پایین‌گذر

فیلتر درونیاب خطی

$$h_{lin}[n] = \begin{cases} 1 - \frac{|n|}{L} & ; \ |n| \leq L \\ 0 & ; \ o.w. \end{cases}$$

$L = 5$

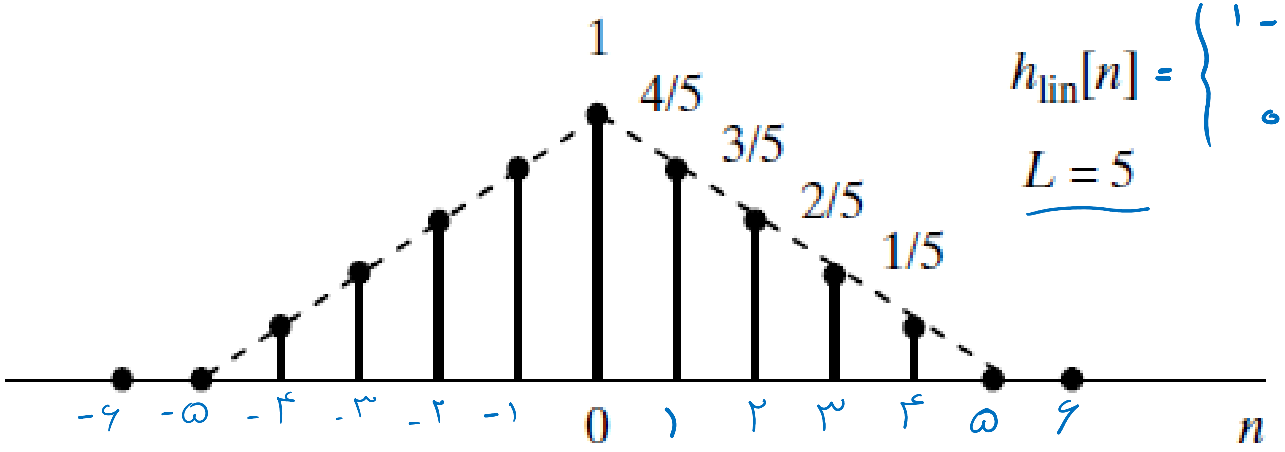
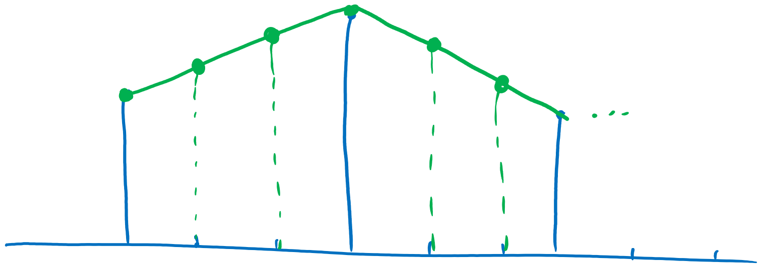


Figure 25 Impulse response for linear interpolation.

$$x_{lin}[n] = x_e[n] * h_{lin}[n]$$

$$= \sum_{k=n-L+1}^{n+L-1} x_e[k]\, h_{lin}[n-k]$$

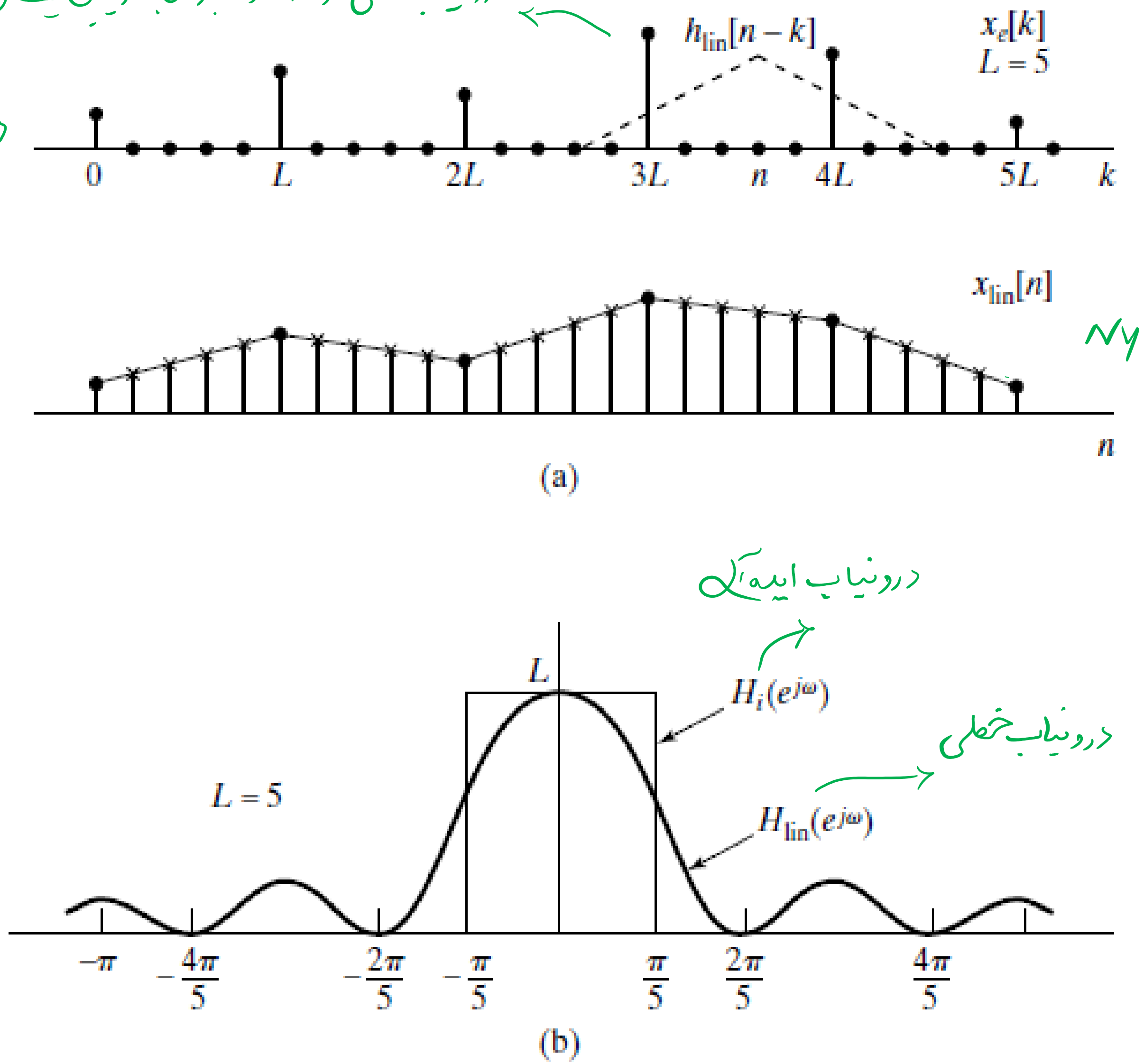


درونیاب خطی از دو نمونه برای بازیابی سیگنال استفاده می‌کند

درحالی‌که درونیاب ایده‌آل به همه نمونه‌ها نیاز دارد و عملاً غیرممکن است.

حوزه زمان :

برای حالتهایی که نرخ نمونه برداری اولیه از نرخ Nyquist بیشتر است.



درونیاب ایده‌آل

درونیاب خطی

حوزه فرکانس :

$$H_{lin}(e^{j\omega}) = \frac{1}{L}\left[\frac{\sin(\frac{\omega L}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})}\right]^2$$

Figure 26 (a) Illustration of linear interpolation by filtering. (b) Frequency response of linear interpolator compared with ideal lowpass interpolation filter.

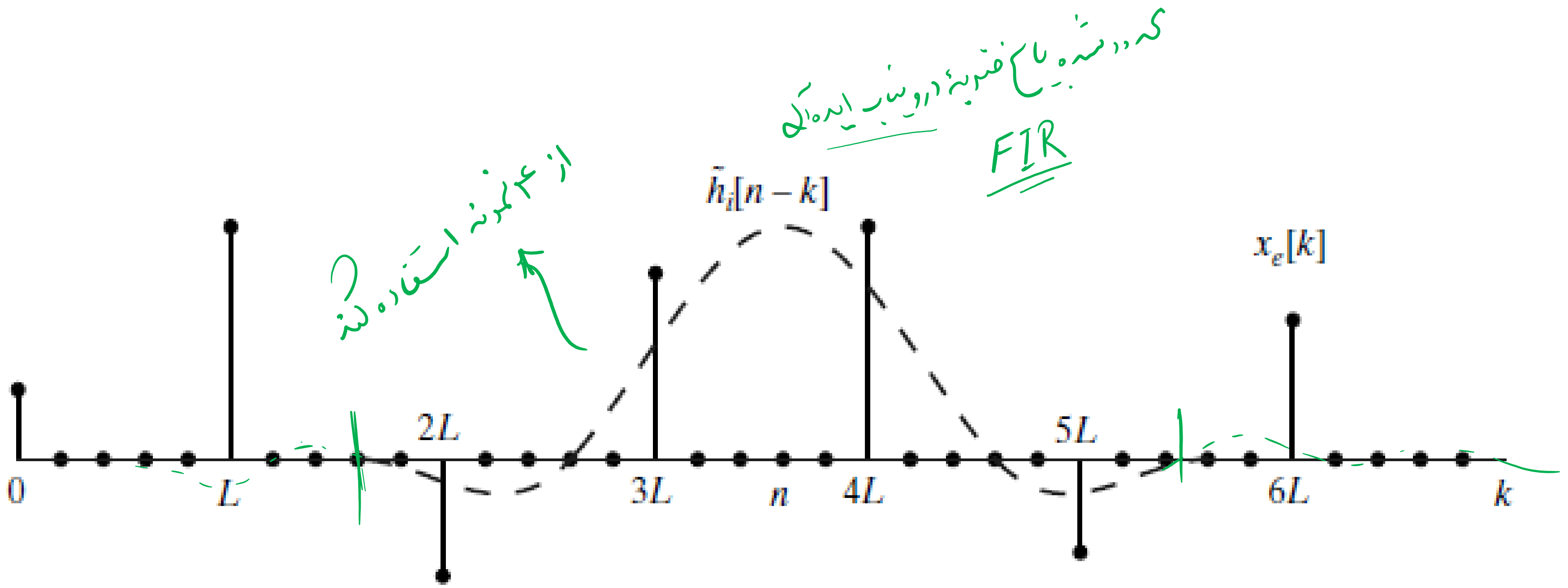


Figure 27 Illustration of interpolation involving $2K = 4$ samples when $L = 5$.

درونیاب cubic
رابطه (97)

پاسخ ضربه

پاسخ فرکانسی

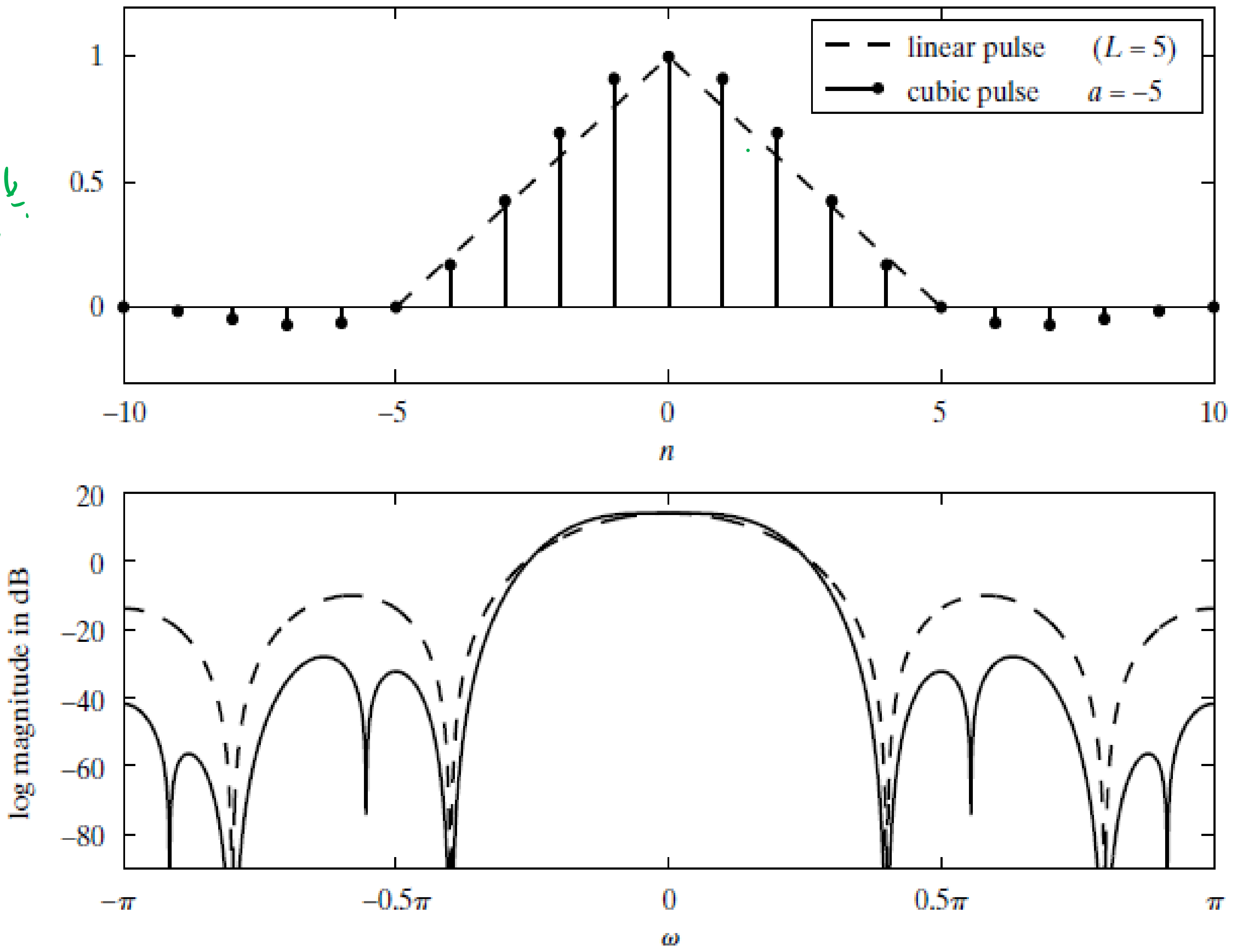


Figure 28 Impulse responses and frequency responses for linear and cubic interpolation.

4.6.4 تغییر نرخ نمونه برداری با ضریب غیرصحیح :

ضریب گویای $\frac{M}{L}$

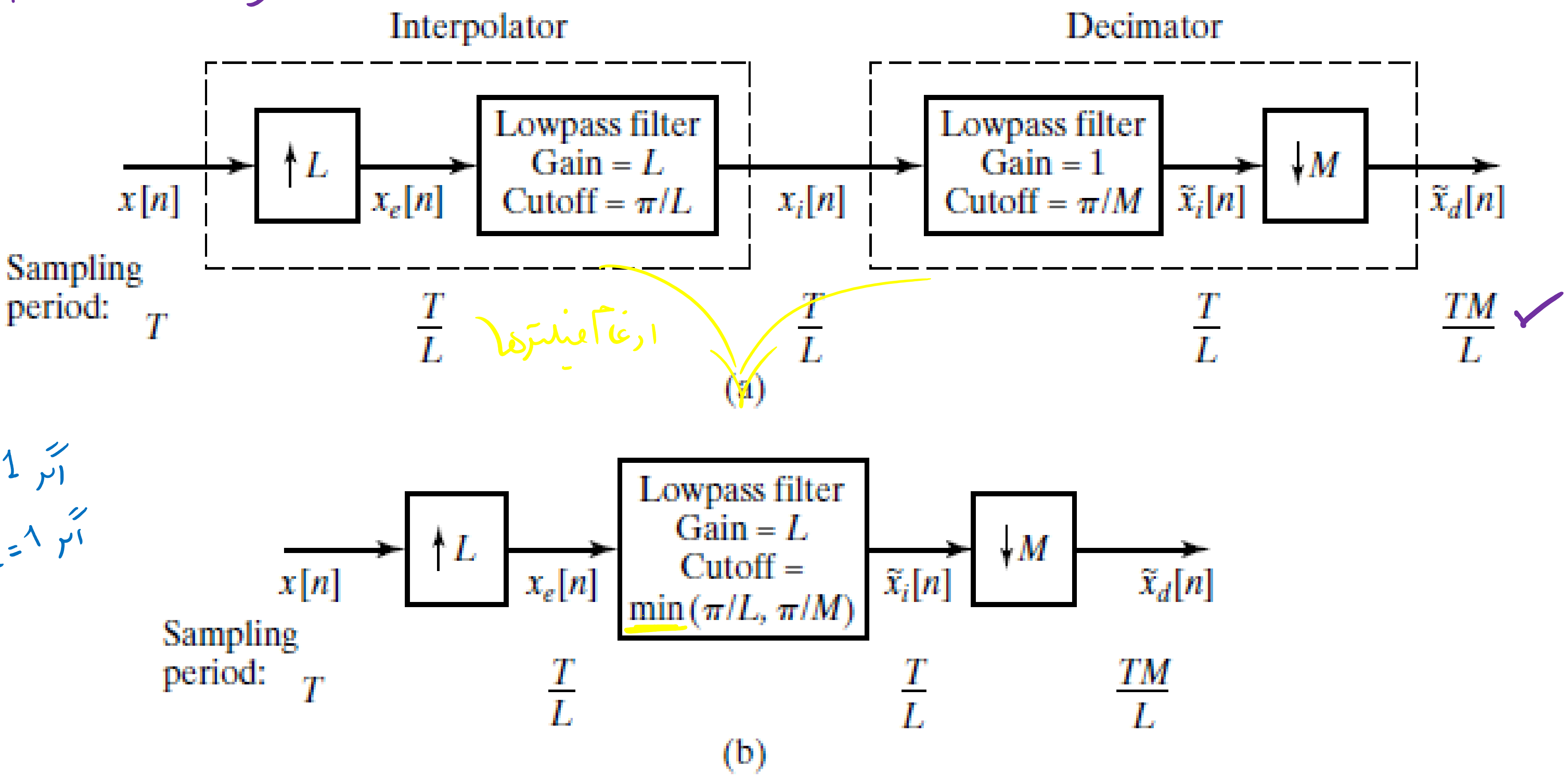
Downsampling با ضریب M

Upsampling با ضریب L

کدامیک ابتدا اعمال می‌شود؟

ابتدا L را اعمال می‌کنیم سپس M

زیرا Downsampling باعث از دست رفتن اطلاعات می‌شود.



اگر M=1 باشد: درونیاب

اگر L=1 باشد: decimator

Figure 29 (a) System for changing the sampling rate by a noninteger factor. (b) Simplified system in which the decimation and interpolation filters are combined.

$x_c(t) \overset{F}{\longleftrightarrow} X_c(j\Omega)$

$x[n] \overset{F}{\longleftrightarrow} X(e^{j\omega})$

حل:

$\frac{M}{L} = \frac{3}{2}$

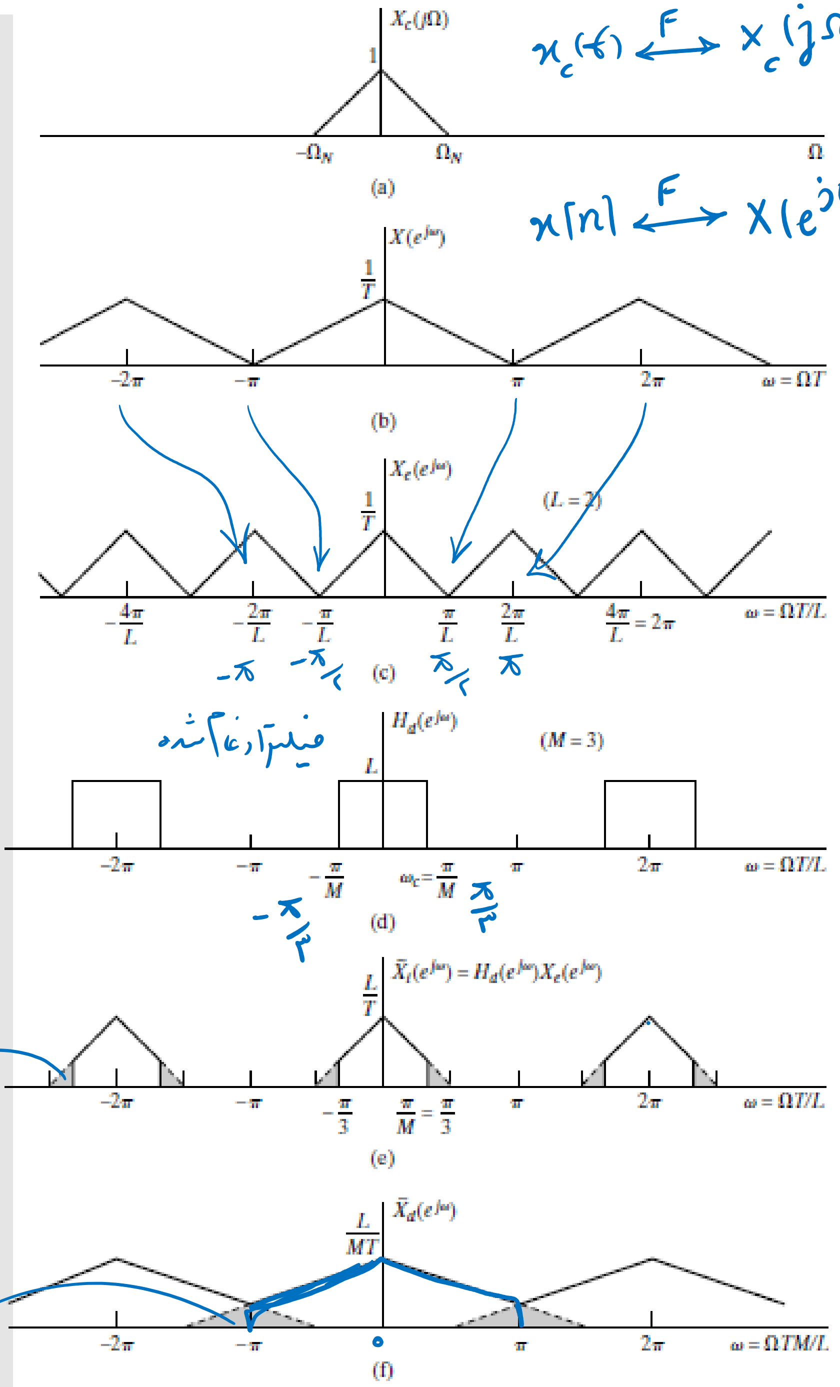


Figure 30 Illustration of changing the sampling rate by a noninteger factor.

فشرده شدن با ضریب

$L = 2$

$\min(\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۳}) = \frac{\pi}{۳}$

$M = 3$

گسترش

۱- گام‌های فشرده سازی

$\frac{\pi}{۲} \xrightarrow{\times ۳} \pi$

$-\frac{\pi}{۲} \rightarrow -\pi$

۲- پریودیک سازی

اطلاعات از دست رفته با فیلتر

اطلاعات از دست رفته بدون فیلتر و از aliasing

4.7: پردازش سیگنال چندنرخی : Multirate Signal Processing :

4.7.1 : جابجایی فیلترها با بلوک های فشرده ساز و گسترده ساز :

$$* \quad x[n] \longrightarrow \boxed{\downarrow M} \xrightarrow{x_a[n]} \boxed{H(z)} \longrightarrow y[n]$$

مثال $H(z) = \dfrac{1}{1-z^{-1}}$

$H(z^M) = \dfrac{1}{1-z^{-M}}$

$$** \quad x[n] \longrightarrow \boxed{H(z^M)} \xrightarrow{x_b[n]} \boxed{\downarrow M} \longrightarrow y[n]$$

- آیا می‌توان سیستم های بالا را جابجا کرد؟ در حالت کلی خیر. زیرا $\downarrow M$ فشرده ساز غیر LTI است.

بلوک های بالا معادل هم اند.

اثبات:

$(**)$

$$X_b(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega M})\, X(e^{j\omega})$$

$$Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M-1} X_b\left(e^{j\left(\frac{\omega}{M}-\frac{2\pi i}{M}\right)}\right) \Rightarrow Y(e^{j\omega}) = \frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M-1} X\left(e^{j\left(\frac{\omega}{M}-\frac{2\pi i}{M}\right)}\right) H\left(e^{j(\omega-2\pi i)}\right)$$

$$H\left(e^{j(\omega-2\pi i)}\right) = H(e^{j\omega})$$

$$Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})\underbrace{\frac{1}{M}\sum_{i=0}^{M-1} X\left(e^{j\left(\frac{\omega}{M}-\frac{2\pi i}{M}\right)}\right)}$$

$$\rightarrow Y(e^{j\omega}) = H(e^{j\omega})\, X_a(e^{j\omega})$$ بلوک $(*)$

جابجایی فیلتر و فشرده ساز :

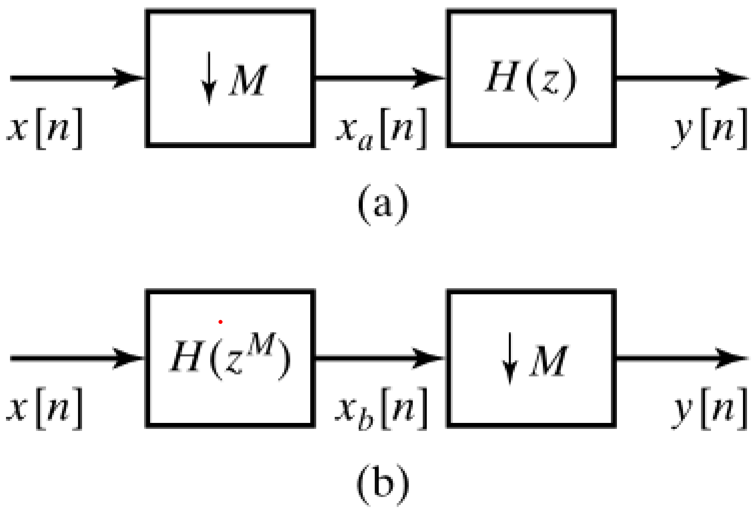


Figure 31 Two equivalent systems based on downsampling identities.

جابجایی فیلتر و گسترده ساز :

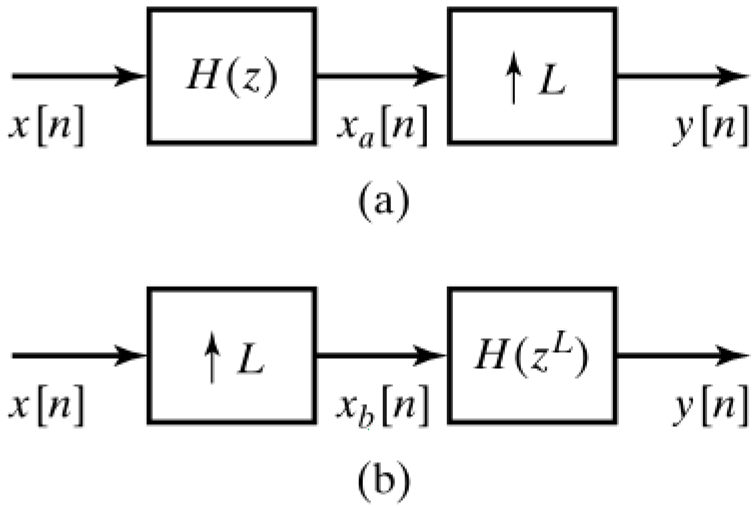


Figure 32 Two equivalent systems based on upsampling identities.

4.7.2: Decimation و Interpolation چندمرحله‌ای:

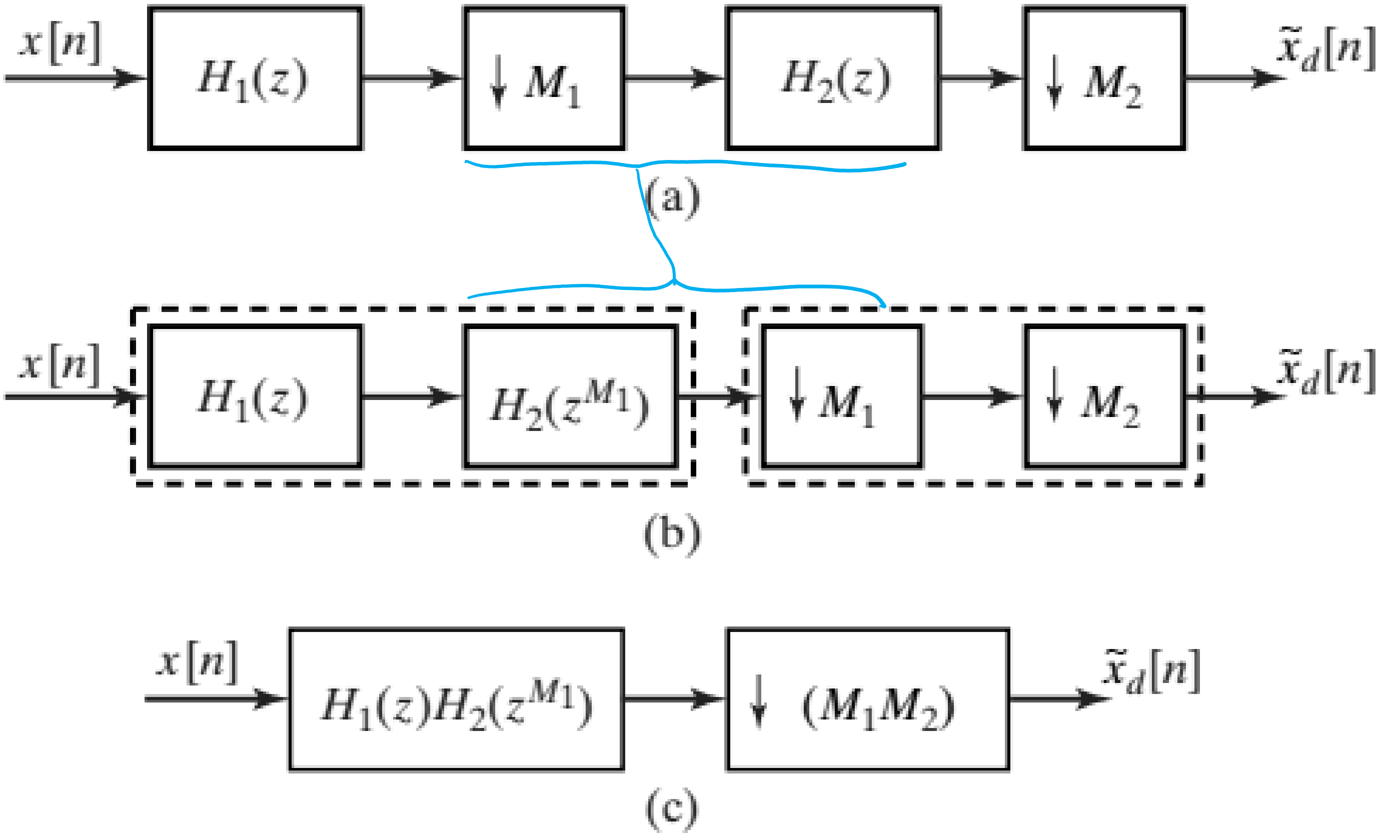


Figure 33 Multistage decimation: (a) Two-stage decimation system. (b) Modification of (a) using downsampling identity of Figure 31. (c) Equivalent one-stage decimation.

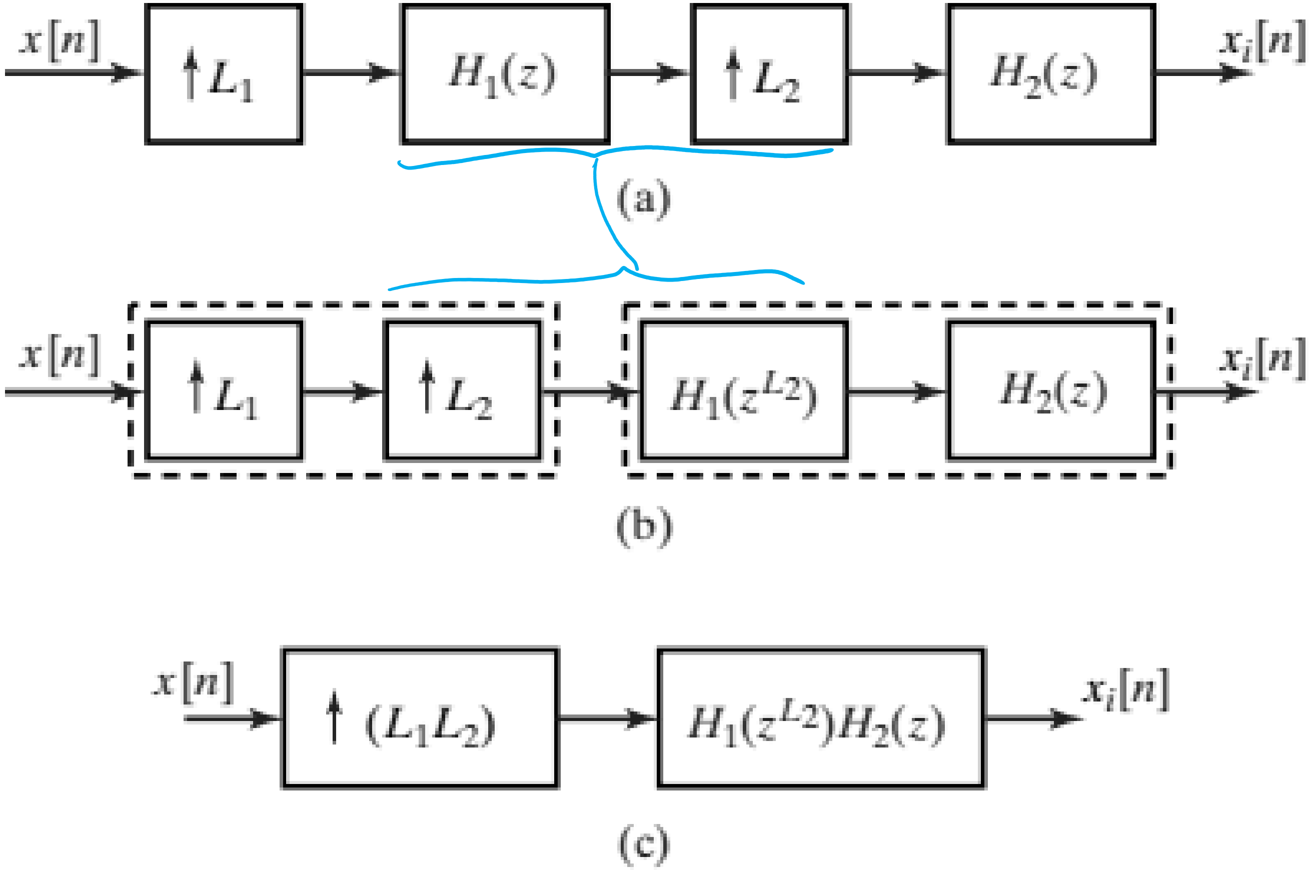


Figure 34 Multistage interpolation: (a) Two-stage interpolation system. (b) Modification of (a) using upsampling identity of Figure 32. (c) Equivalent one-stage interpolation.

4.7.3 تجزیه چندفازه : Polyphase Decomposition

هر $H(z)$ را می‌توان به شکل زیر نمایش داد:

$$H(z)=\sum_{k=0}^{M-1} E_k(z^M)\, z^{-k}$$

Fig 37

به $E_k(z)$ ها مؤلفه‌های Polyphase گفته می‌شود.

می‌توان نشان داد:

$$e_k[n] = h[nM+k] = h_k[nM] \qquad k=0,1,2,\dots,M-1$$

$$e_0[n] = h[nM]$$

$$e_1[n] = h[nM+1]$$

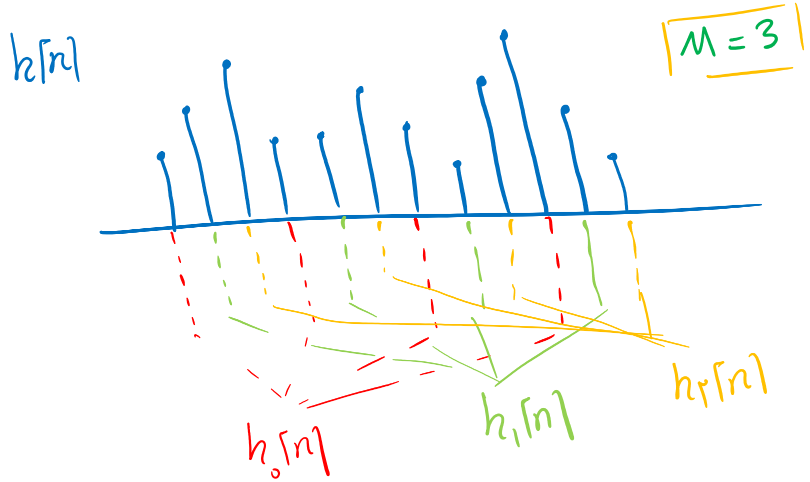
$$e_2[n] = h[nM+2]$$

$$\vdots$$

$$h[n] = \sum_{k=0}^{M-1} h_k[n-k]$$

Fig 35,36

$$h_k[n] = \begin{cases} h[n+k]\,; & n : \text{ضریب صحیح } M \\ 0\,; & \text{o.w.} \end{cases}$$



تجزیه چندفاز

بازسازی چندفاز

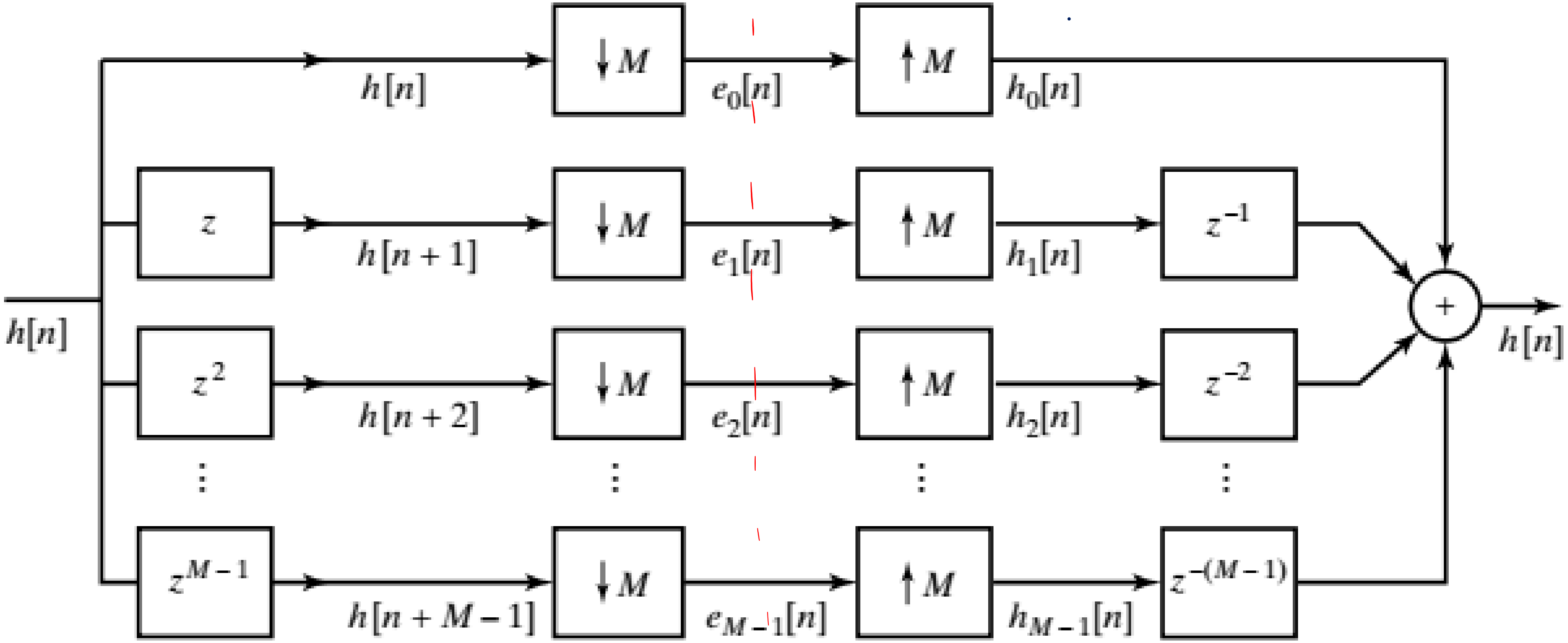


Figure 35 Polyphase decomposition of filter $h[n]$ using components $e_k[n]$.

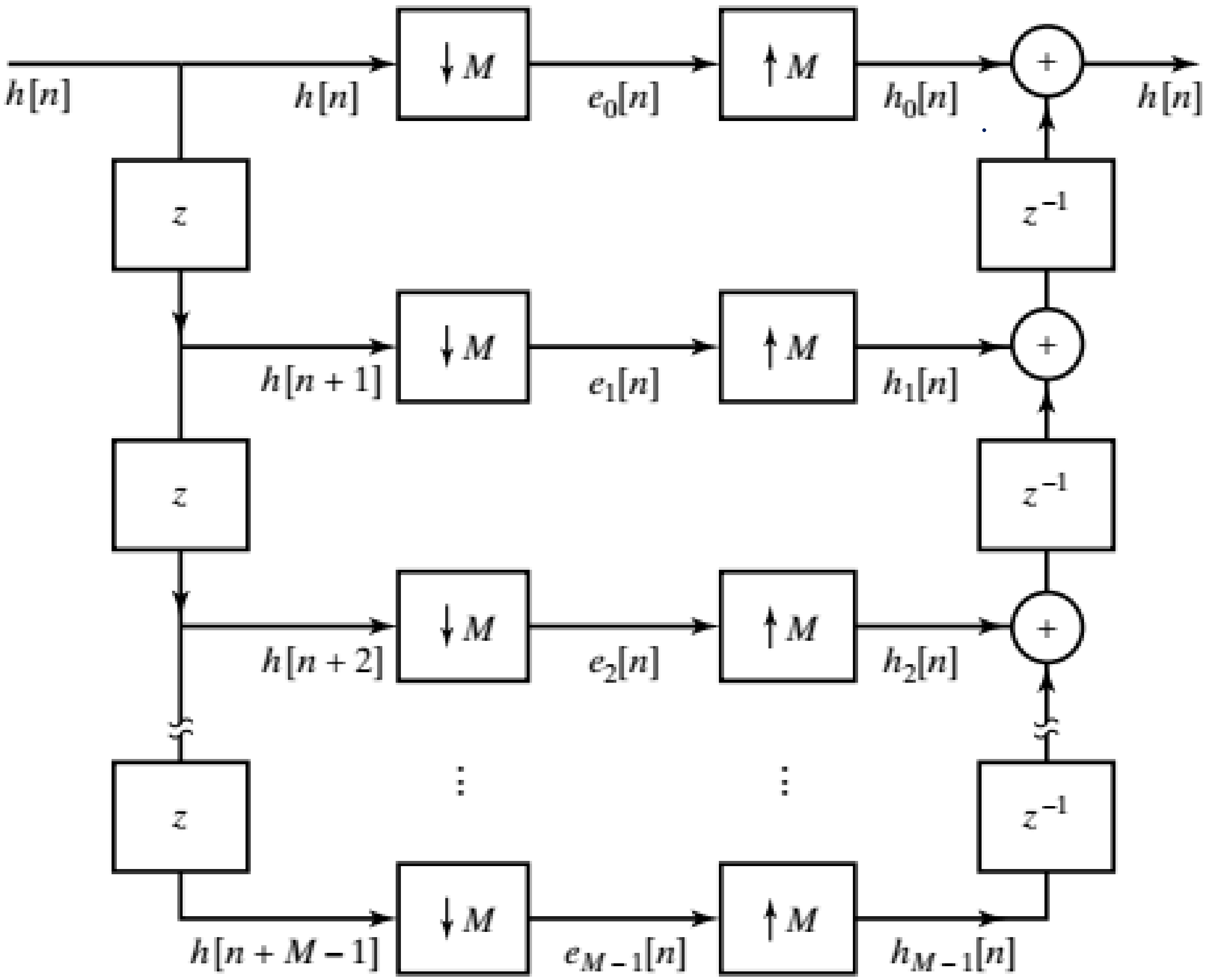
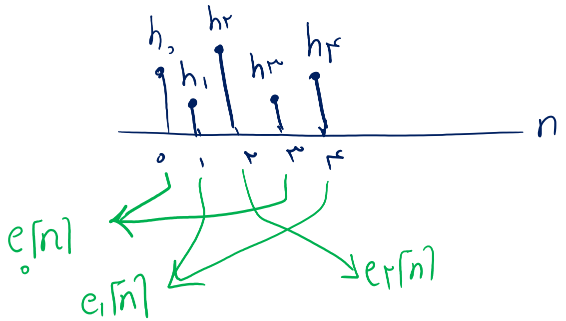


Figure 36 Polyphase decomposition of filter $h[n]$ using components $e_k[n]$ with chained delays.

مثال:

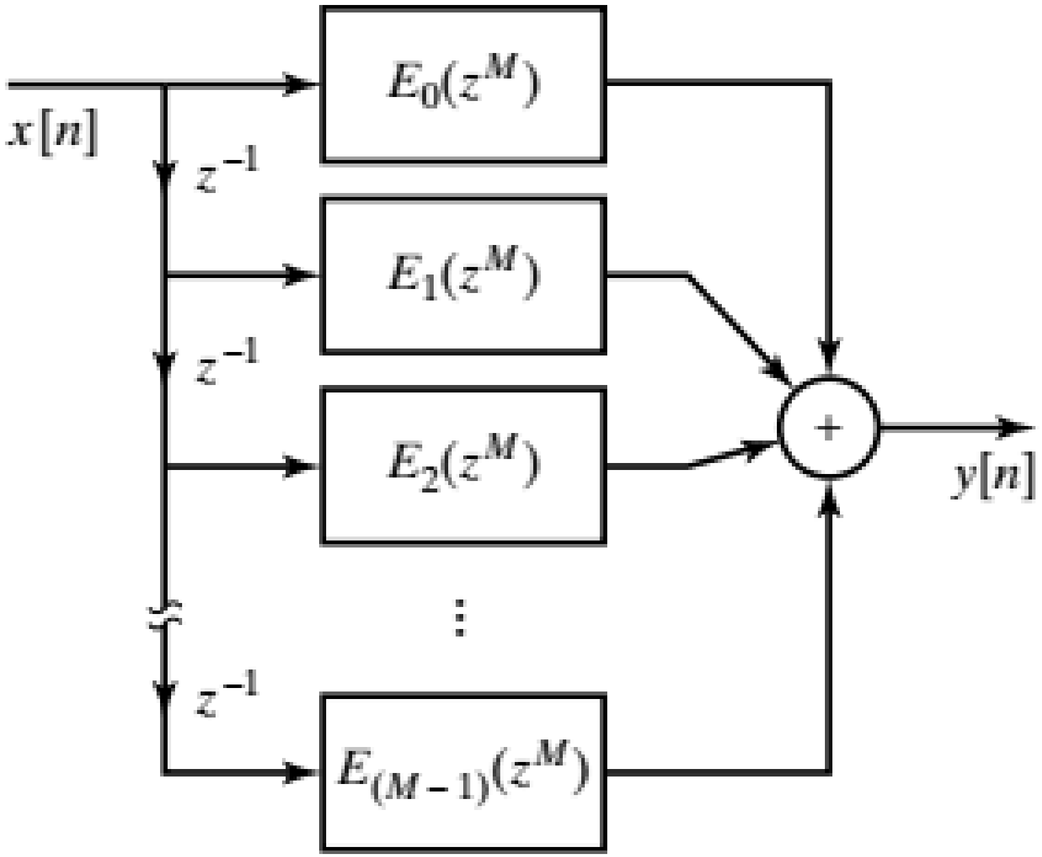


$$h[n] = h_0\delta[n] + h_1\delta[n-1] + \dots + h_4\delta[n-4]$$

$M = 3$

$$H(z) = h_0 + h_1 z^{-1} + h_2 z^{-2} + \dots + h_4 z^{-4}$$

$$= \underbrace{(h_0 + h_3 z^{-3})}_{E_0(z^3)} + \underbrace{(h_1 + h_4 z^{-3})}_{E_1(z^3)} z^{-1} + \underbrace{h_2}_{E_2(z^3)} z^{-2}$$



$$H(z) = \sum_{k=0}^{M-1} E_k(z^M)\, z^{-k}$$

Figure 37 Realization structure based on polyphase decomposition of $h[n]$.

4.7.4 : پیاده‌سازی چندفازه فیلتر Decimation :

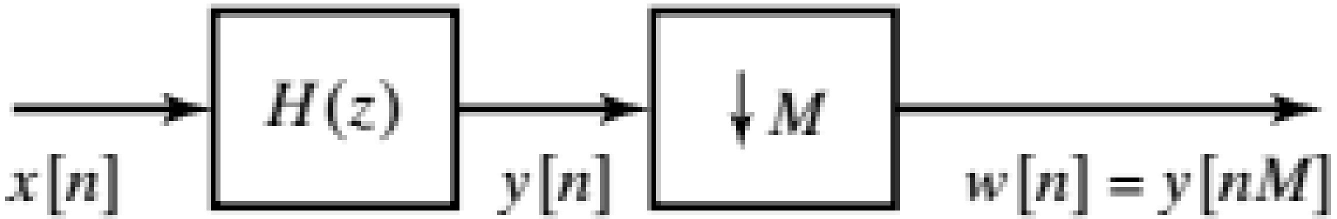


Figure 38 Decimation system.

سیستم بالا کارآیی کمی دارد زیرا ابتدا همه‌ی نمونه‌ها را فیلتر می‌کند و سپس تعدادی از نمونه‌های فیلتر شده را حذف می‌کند.

بهتر است فقط روی نمونه‌های مورد نیاز فیلتر را اعمال کنیم.

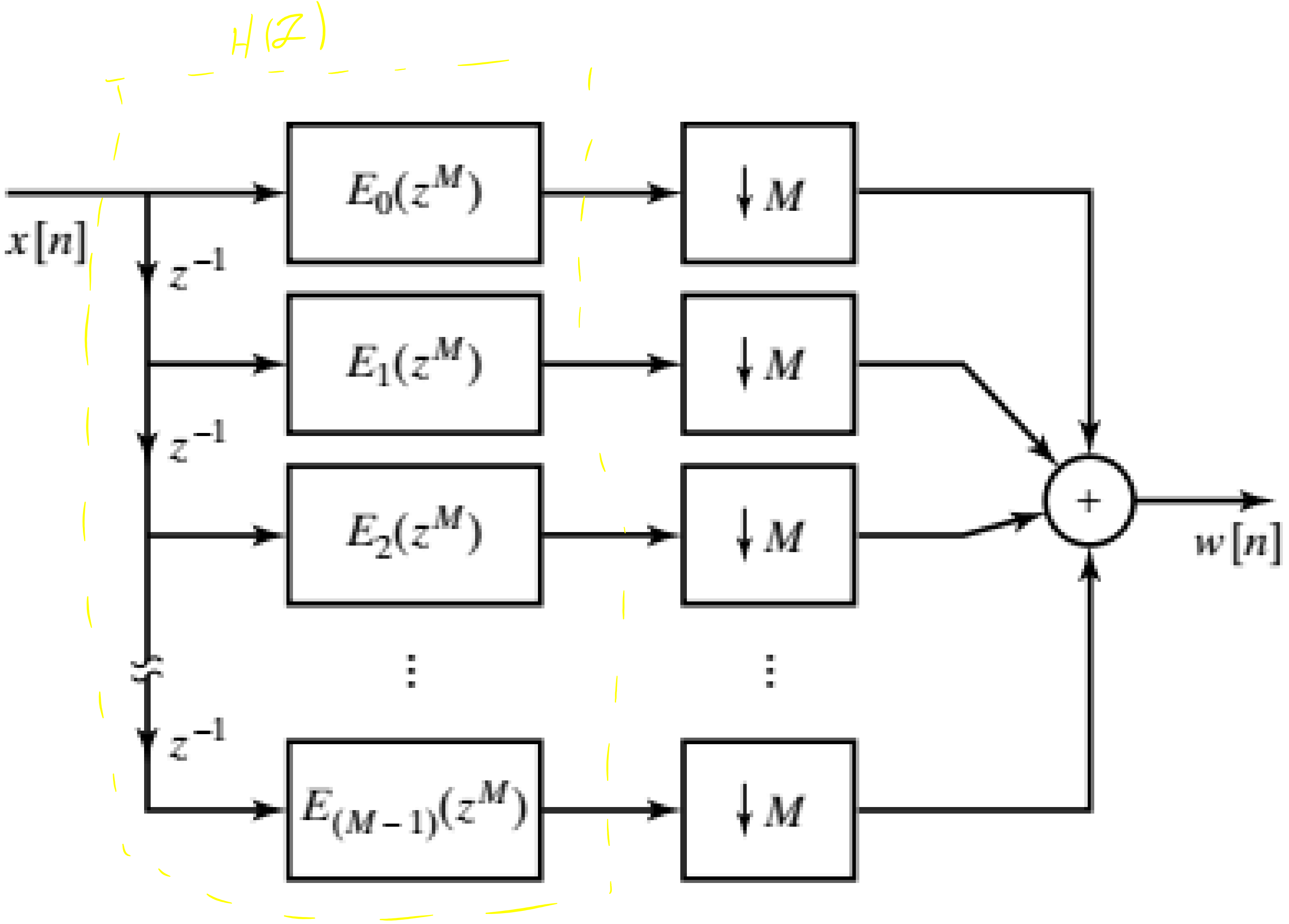
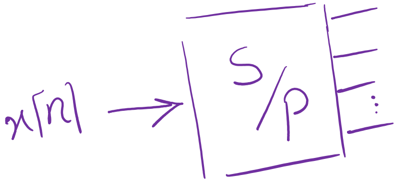


Figure 39 Implementation of decimation filter using polyphase decomposition.



از نظر حجم پردازش ≃ $\frac{1}{M}$ حالت قبل

تعداد عملیات ضرب و جمع

Computational complexity

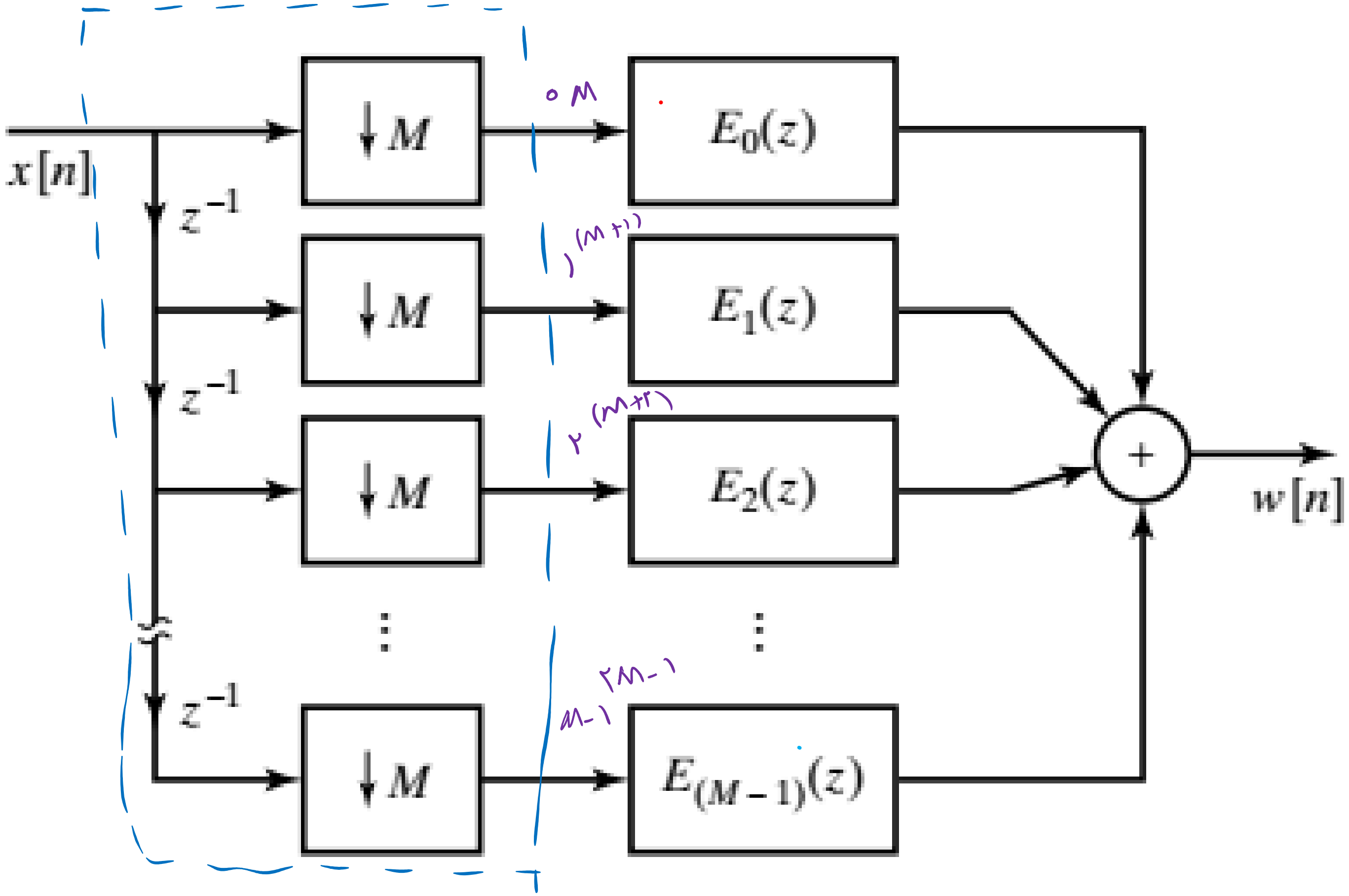
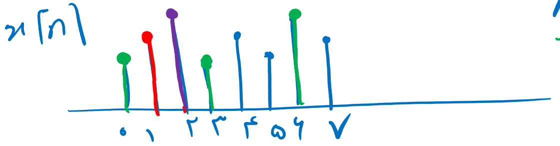


Figure 40 Implementation of decimation filter after applying the downsampling identity to the polyphase decomposition.

M=3



4.7.5 : پیاده سازی چندفازه فیلترهای درونیاب :

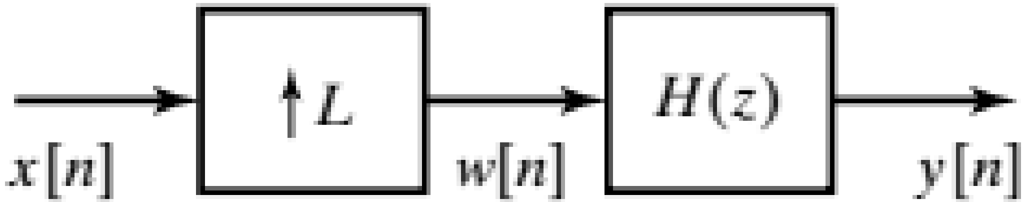


Figure 41 Interpolation system.

کارآیی کم سیستم بالا : فیلتر پردازش ها روی صفرهای اضافه شده توسط $\uparrow L$ انجام میدهد که نیازی ندارد.

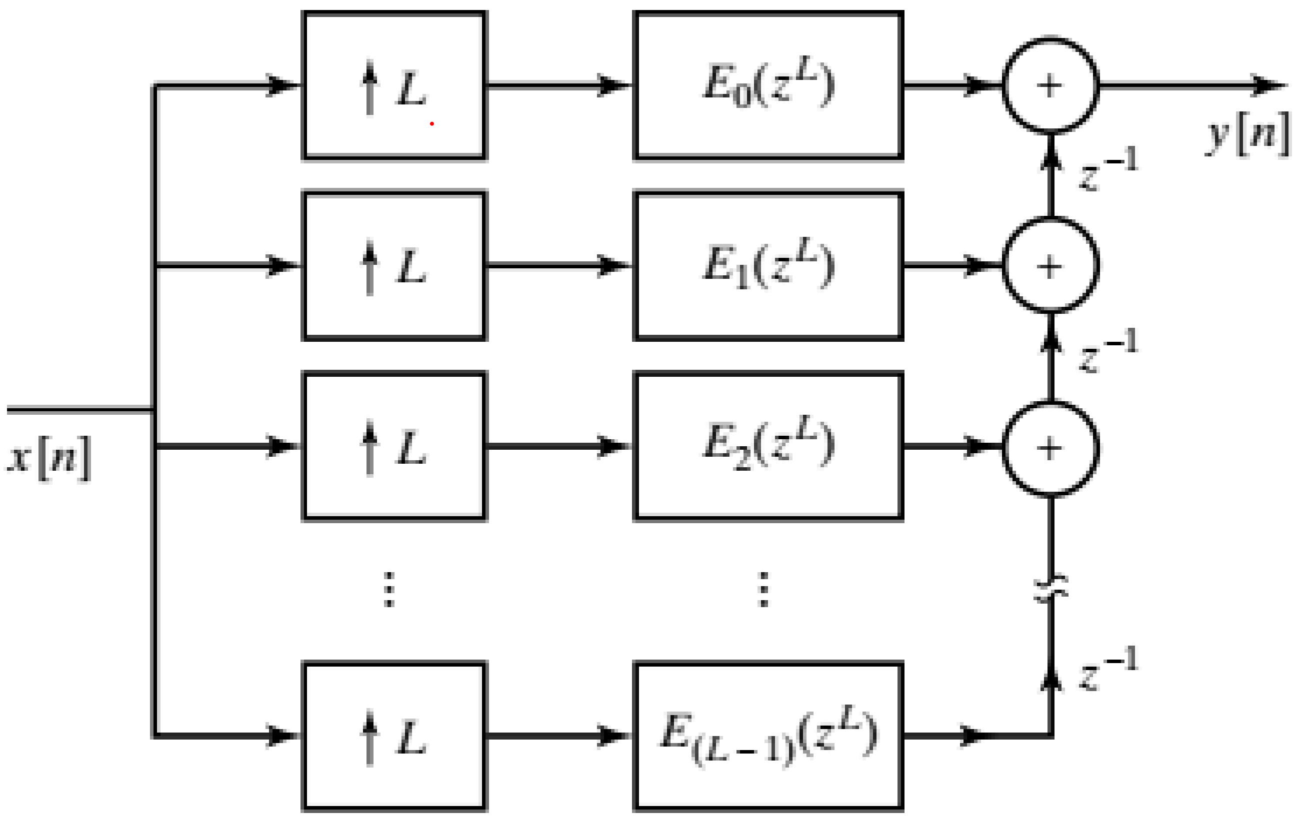


Figure 42 Implementation of interpolation filter using polyphase decomposition.

پیچیدگی محاسباتی: $\frac{1}{L}$ ساختار اولیه

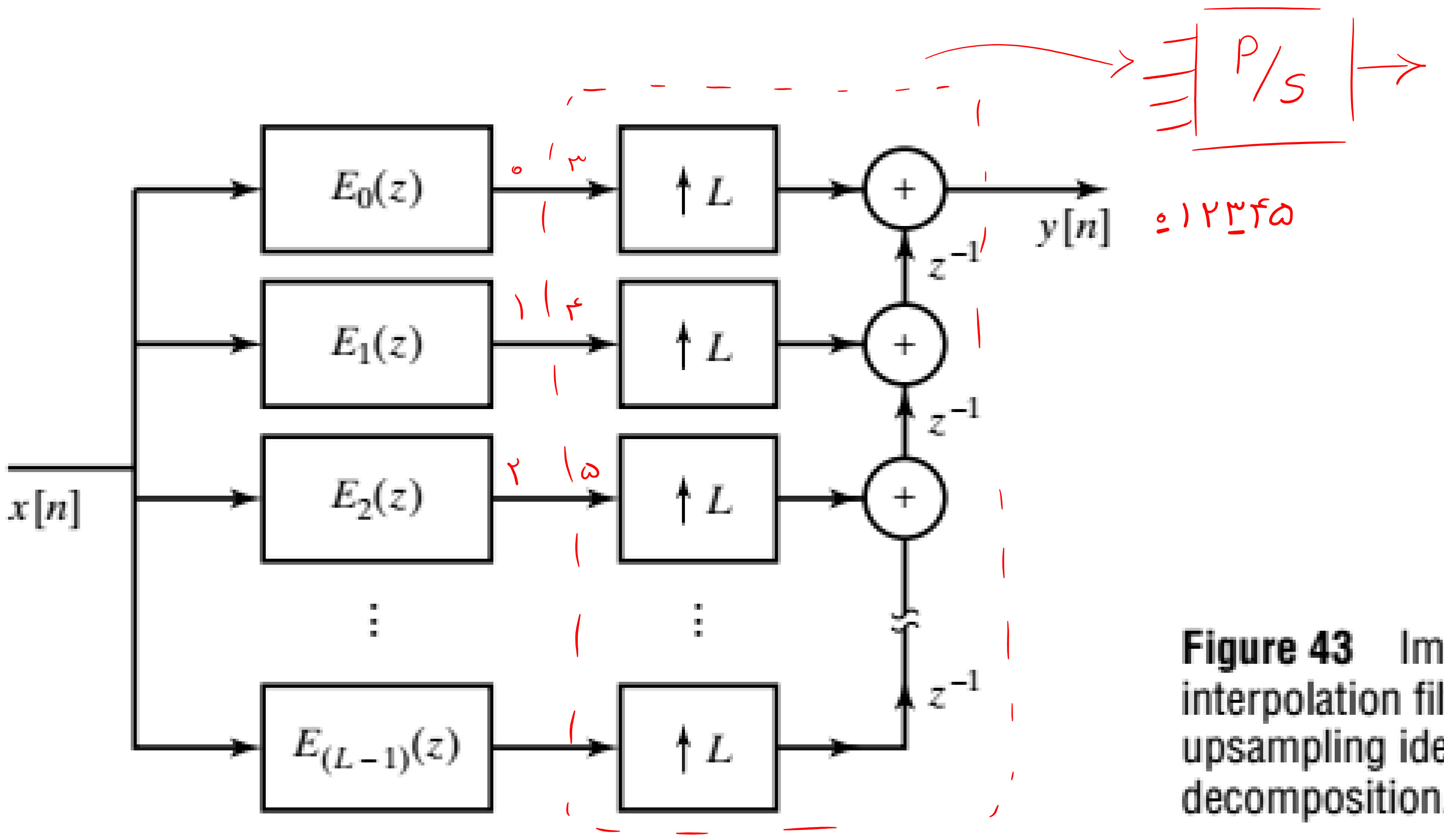
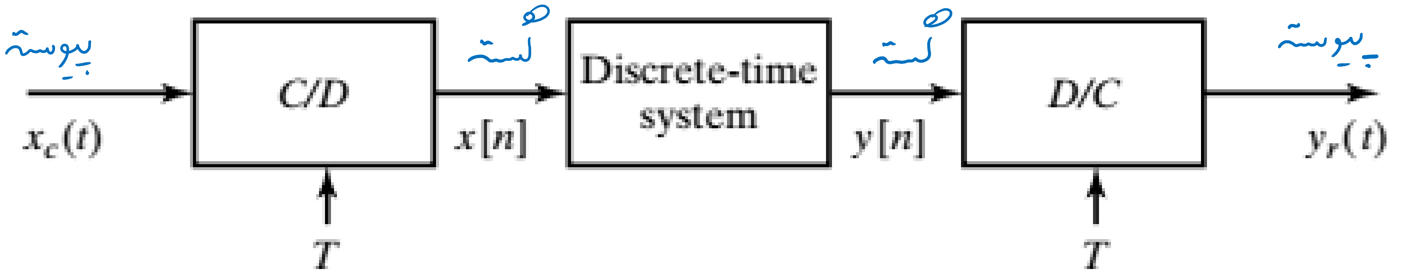


Figure 43 Implementation of interpolation filter after applying the upsampling identity to the polyphase decomposition.

4.8 : پردازش دیجیتال سیگنال‌های آنالوگ :

پردازش زمان گسسته :



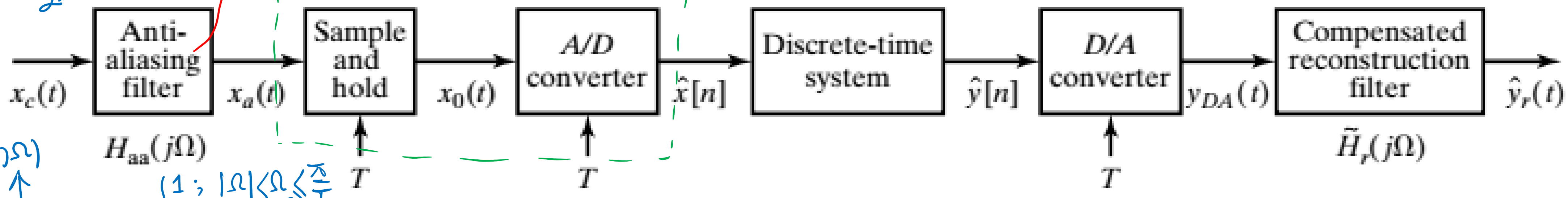
(a)

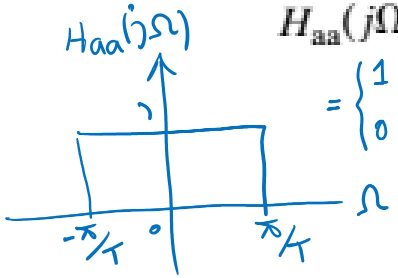
پردازش دیجیتال :

aliasing: C/D فشرده‌سازه

فیلتر برای کاهش اثر aliasing

$\hat{y}_r(t) = y_a(t) + e_a(t)$





$$= \begin{cases} 1 \; ; & |\Omega| < \Omega_c \leq \frac{\pi}{T} \\ 0 \; ; & |\Omega| \geq \Omega_c \end{cases}$$

(b)

$\boxed{\text{صحبت } 3 \sim 4kHz}$

$4kHz \sim 20kHz$

Figure 47 (a) Discrete-time filtering of continuous-time signals. (b) Digital processing of analog signals.

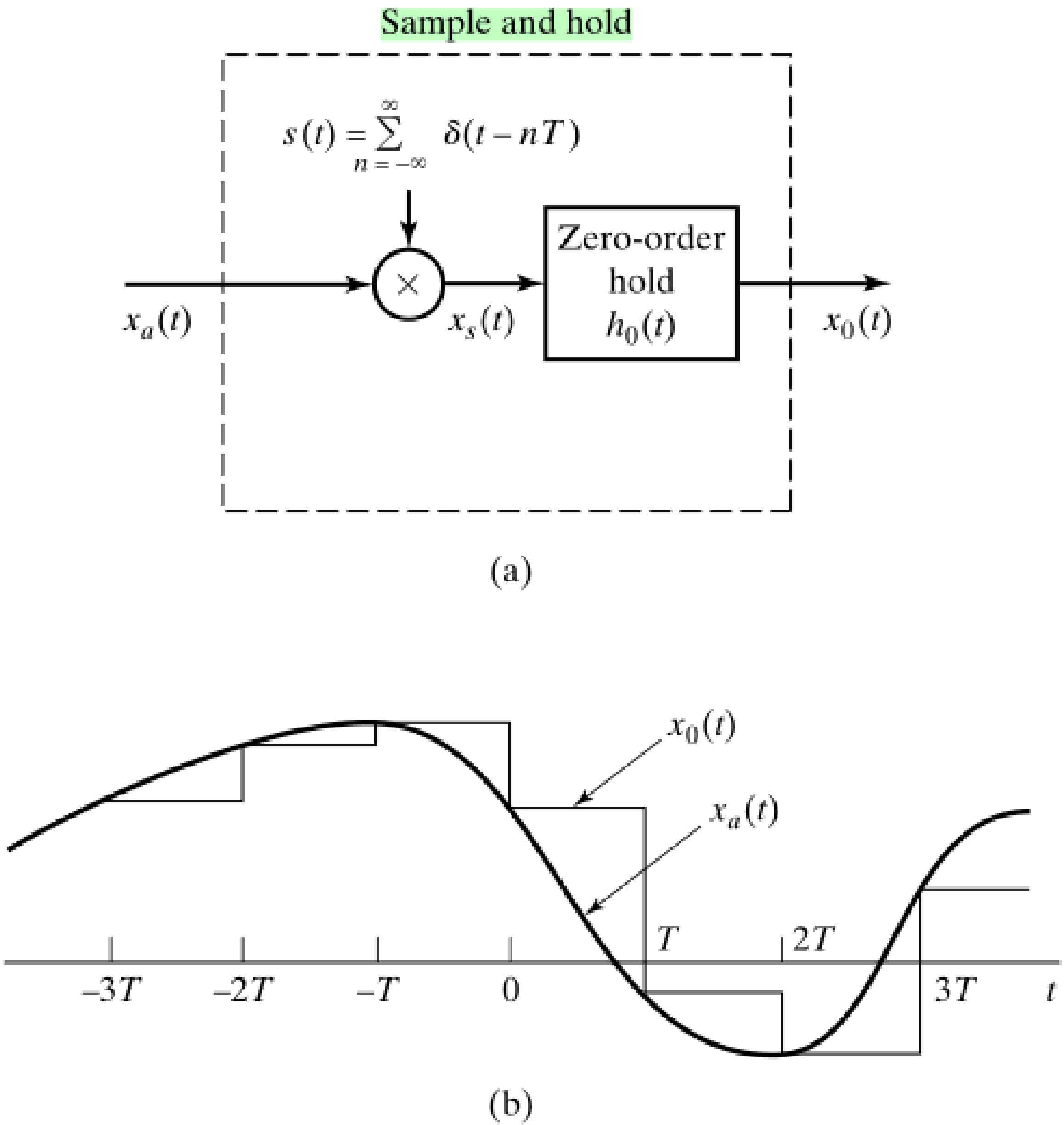


Figure 52 (a) Representation of an ideal sample-and-hold. (b) Representative input and output signals for the sample-and-hold.

Fig 53:

تبدیل A/D :

$$x_a(t) \longrightarrow \boxed{C/D} \xrightarrow{x[n]} \boxed{\text{Quantizer}} \xrightarrow{\hat{x}[n]} \boxed{\text{coder}} \longrightarrow \hat{x}_B[n]$$

T

$$\hat{x}[n] = Q(x[n])$$

مشخصه‌های A/D :

محدوده ورودی : X_m full scale

step size : Δ

تعداد بیتها : B

تعداد سطوح کوانتیزاسیون $= 2^{B+1}$

تعداد بیتهای واقعی $= B+1$

بیت علامت

رابطه بین پارامترهای A/D

$$\downarrow \boxed{\Delta = \frac{2X_m}{\uparrow 2^{B+1}}} = \frac{X_m}{2^B}$$

مشکلی که quantizer ایجاد می‌کند : خطای کوانتیزاسیون

۱- از دست رفتن اطلاعات Information Loss

نتیجه: وارون ناپذیر بودن Quantizer

۲- سیستم غیرخطی

نتیجه: قابل جابه‌جایی نیست.

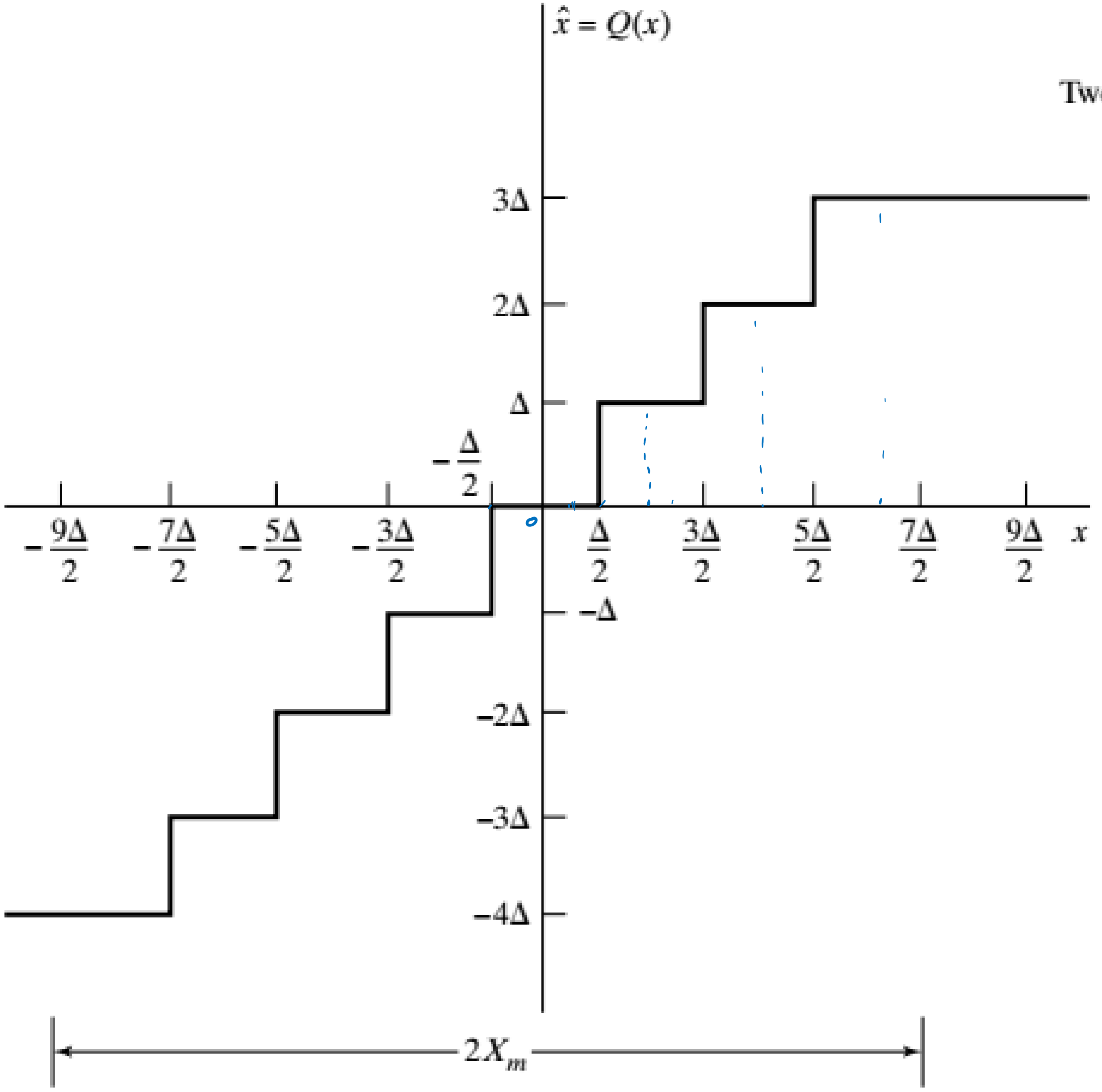
با این وجود با توجه به پردازنده‌های دیجیتال از کوانتایزر استفاده می‌کنیم.

راه حل این مشکلات : $\uparrow B$: نیاز به هزینه بیشتر ، منطبق کردن پردازنده

$B = ۲$

$۲^{B+1} = ۸$

تعداد سطوح خروجی



Two's-complement code	Offset binary code
011	111
010	110
001	101
000	100
111	011
110	010
101	001
100	000

Figure 54 Typical quantizer for A/D conversion.

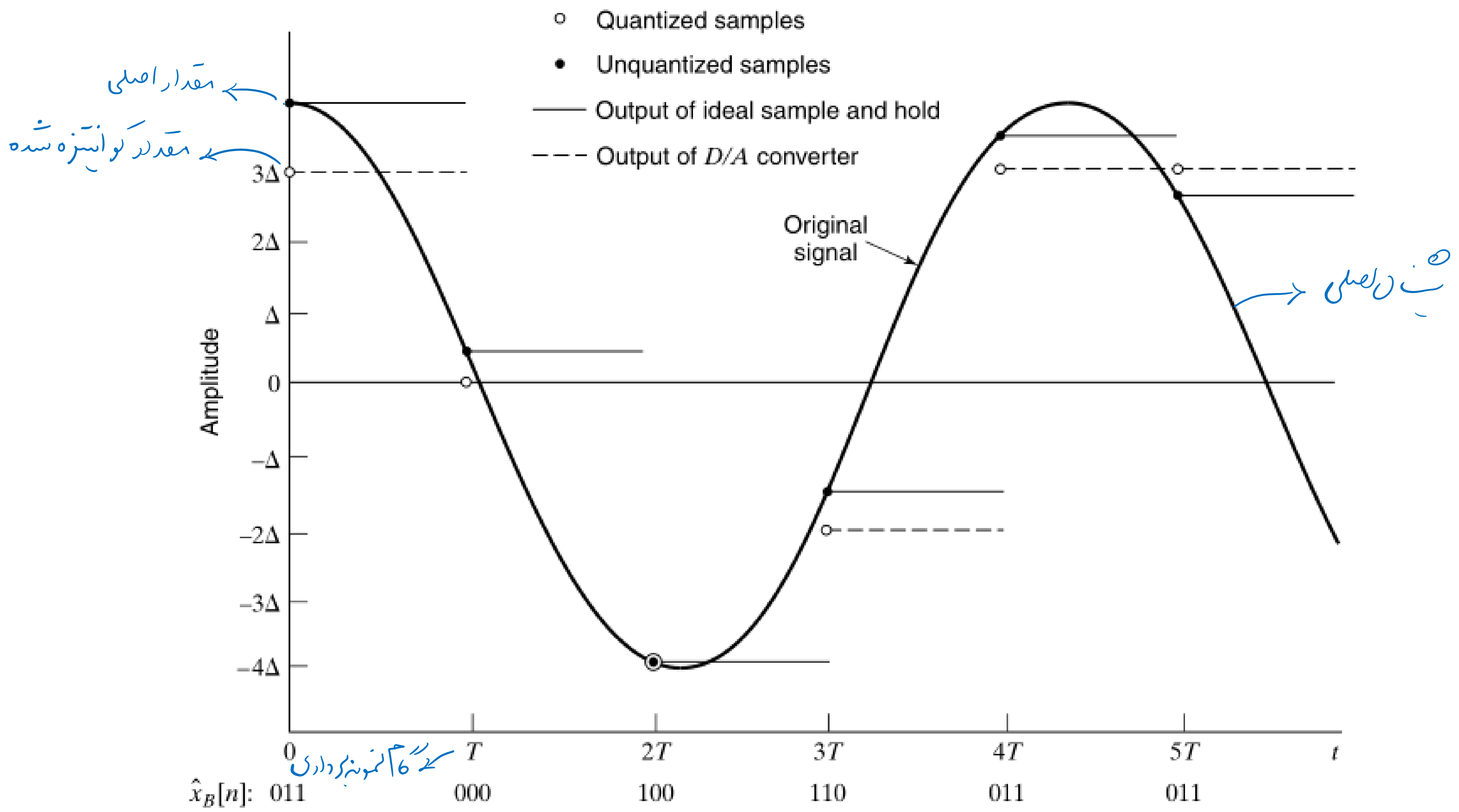
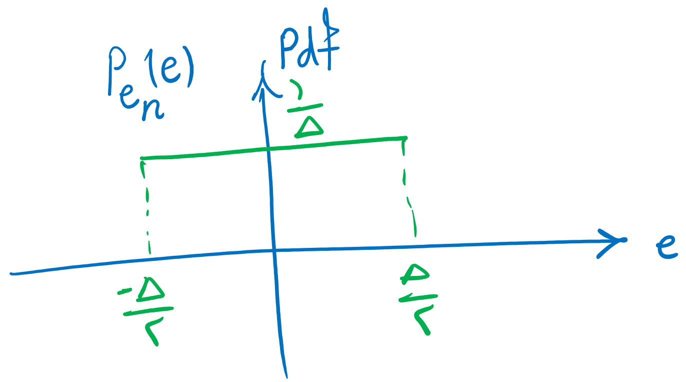


Figure 55 Sampling, quantization, coding, and D/A conversion with a 3-bit quantizer.

4.8.3 : آنالیز خطاهای کوانتیزاسیون :

اختلاف مقادیر کوانتیزه شده و اصلی

$$e[n] = \hat{x}[n] - x[n] \rightarrow \hat{x}[n] = x[n] + e[n]$$



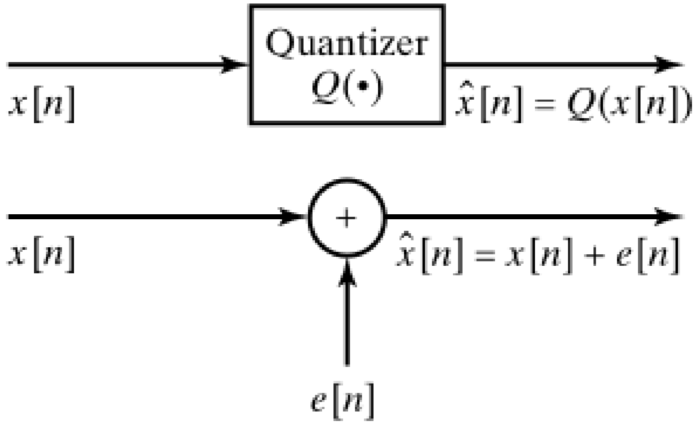
$$-\frac{\Delta}{2} < x[n] \leq \frac{\Delta}{2} \longrightarrow \hat{x}[n] = 0 \longrightarrow -\frac{\Delta}{2} \leq e[n] < \frac{\Delta}{2}$$

۱، از نویز سفید ایستان

Uncorrelated

۲، $e[n]$, $x[n]$ ناهمبسته اند : رابطه‌ای بین نمونه ها وجود ندارد.

۳، $e[n]$ روی کل محدوده کوانتایزر توزیع یکنواخت دارد.



غیرخطی :

خطی :

Figure 56 Additive noise model for quantizer.

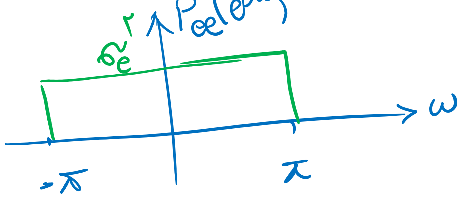
$e[n]$ نویز سفید با توزیع یکنواخت و با میانگین صفر و واریانس :

$$\sigma_e^2 = \int_{-\frac{\Delta}{2}}^{\frac{\Delta}{2}} e^2 \frac{1}{\Delta}\, de = \frac{\Delta^2}{12}$$

$$\Delta = \frac{X_m}{2^B} \longrightarrow \sigma_e^2 = \frac{2^{-2B} X_m^2}{12}$$

واریانس خطای کوانتایزر $(B+1)$ بیتی با دامنه ورودی X_m

مدل نویز جمع شونده برای کوانتایزر



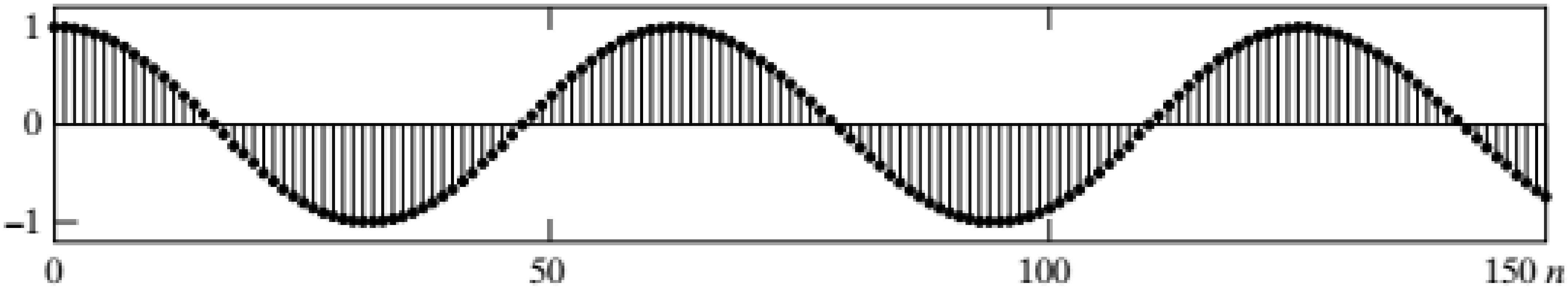
چگالی طیف توان

نتیجه : بنابراین A/D به سیستم نویز اضافه می‌کند.

$$\phi_{ee}[m] = \sigma_e^2 \delta[m] \xrightarrow{F} P_{ee}(e^{j\omega}) = \sigma_e^2 = \frac{2^{-2B} X_m^2}{12} \; ; \; |\omega| \leq \pi$$

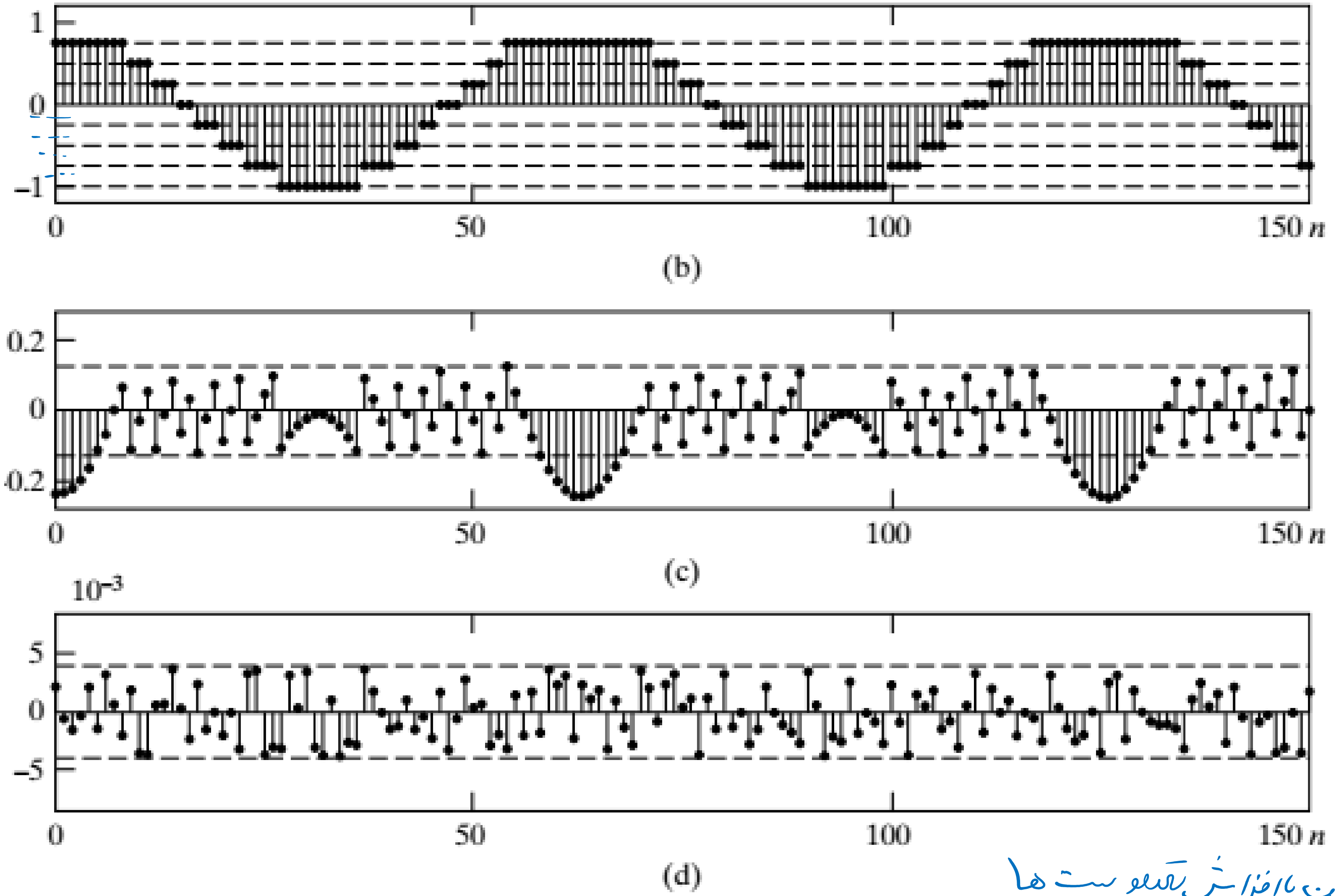
مثال :

$x[n] = ۰٫۹۹ \cos(\frac{n}{۱۰})$



(a)

Figure 57 Example of quantization noise. (a) Unquantized samples of the signal $x[n] = 0.99 \cos(n/10)$.



3-bit / 8-level

$e[n] = \hat{x}[n] - x[n]$

$\simeq$ -۰,۲ ~ ۰,۲

8-bit / 256-level

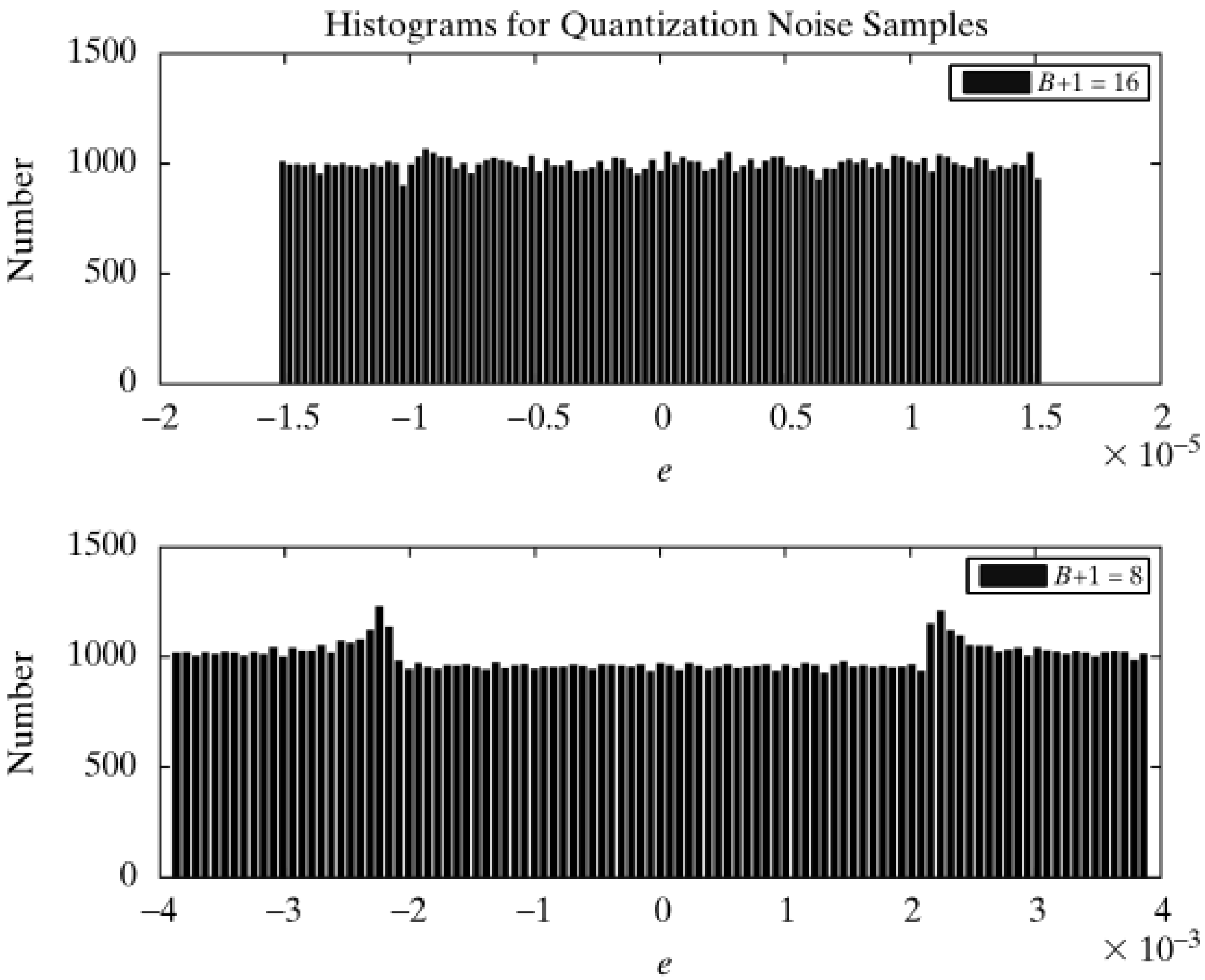
$e[n] = \hat{x}[n] - x[n]$

$\simeq$ -۰,۰۰۵ ~ ۰,۰۰۵

کاهش خطای کوانتیزاسیون با افزایش تعداد بیت ها

Figure 57 (*continued*) (b) Quantized samples of the cosine waveform in part (a) with a 3-bit quantizer. (c) Quantization error sequence for 3-bit quantization of the signal in (a). (d) Quantization error sequence for 8-bit quantization of the signal in (a).

نمودار هیستوگرام e[n] برای $B+1=16, B+1=8$:



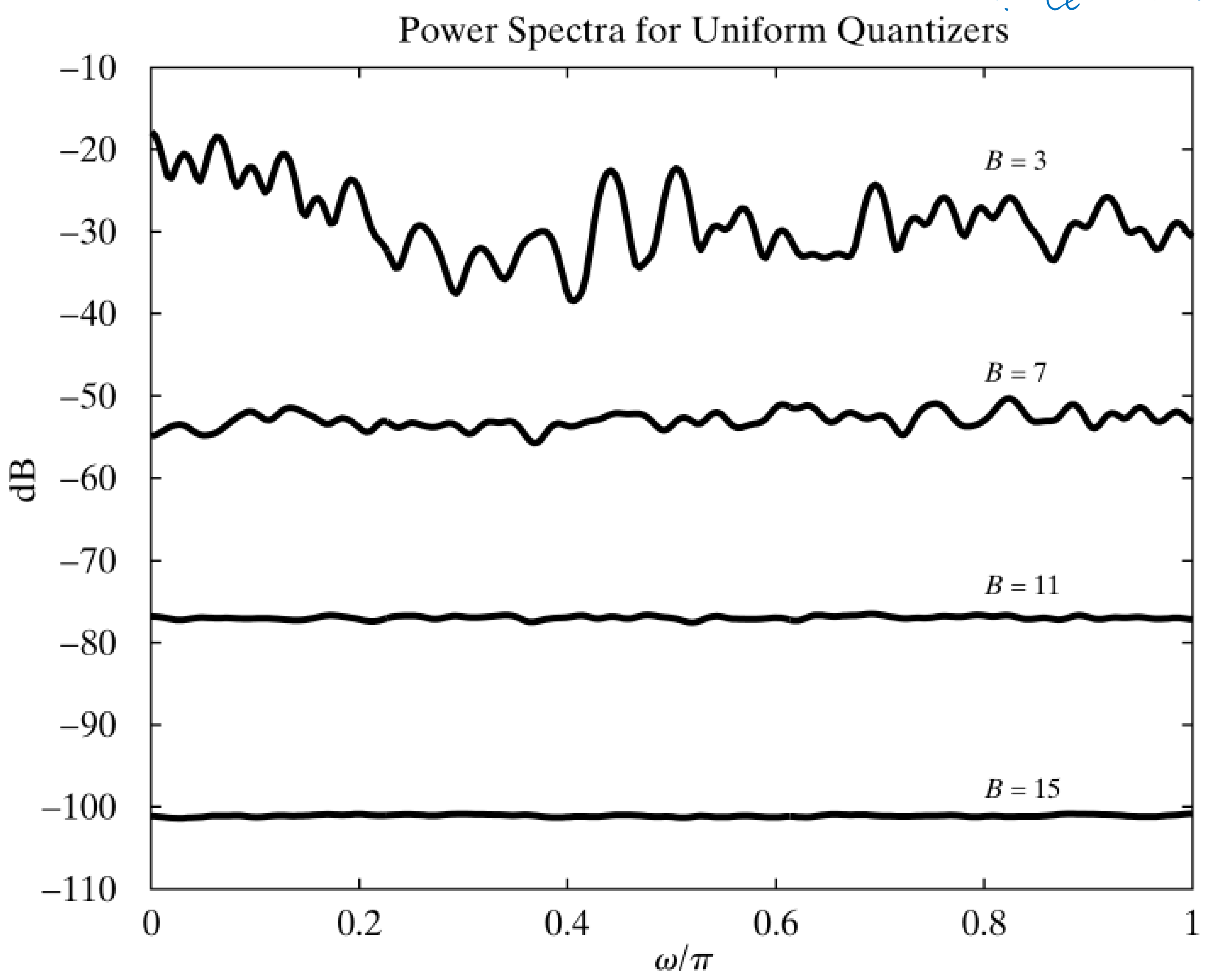
$N = 101000$

101 bin

Figure 59 Histograms of quantization noise for (a) $B + 1 = 16$ and (b) $B + 1 = 8$.

نمودار چگالی طیفی توان نویز $e[n]$: $P_{ee}(e^{j\omega})$ برحسب dB :

$10\log_{10}(P_{ee}(e^{j\omega}))$



با افزایش B، چگالی طیفی توان نویز کاهش می یابد.

Figure 60 Spectra of quantization noise for several values of *B*.

$$SNR_Q = 10 \log_{10}\left(\frac{\sigma_x^2}{\sigma_e^2}\right) = 10 \log_{10}\left(\frac{12 \times 2^{2B}\, \sigma_x^2}{X_m^2}\right)$$

$$= 6.02B + 10.8 - 20 \log_{10}\left(\frac{X_m}{\sigma_x}\right)$$

$B \uparrow$

$SNR \uparrow$

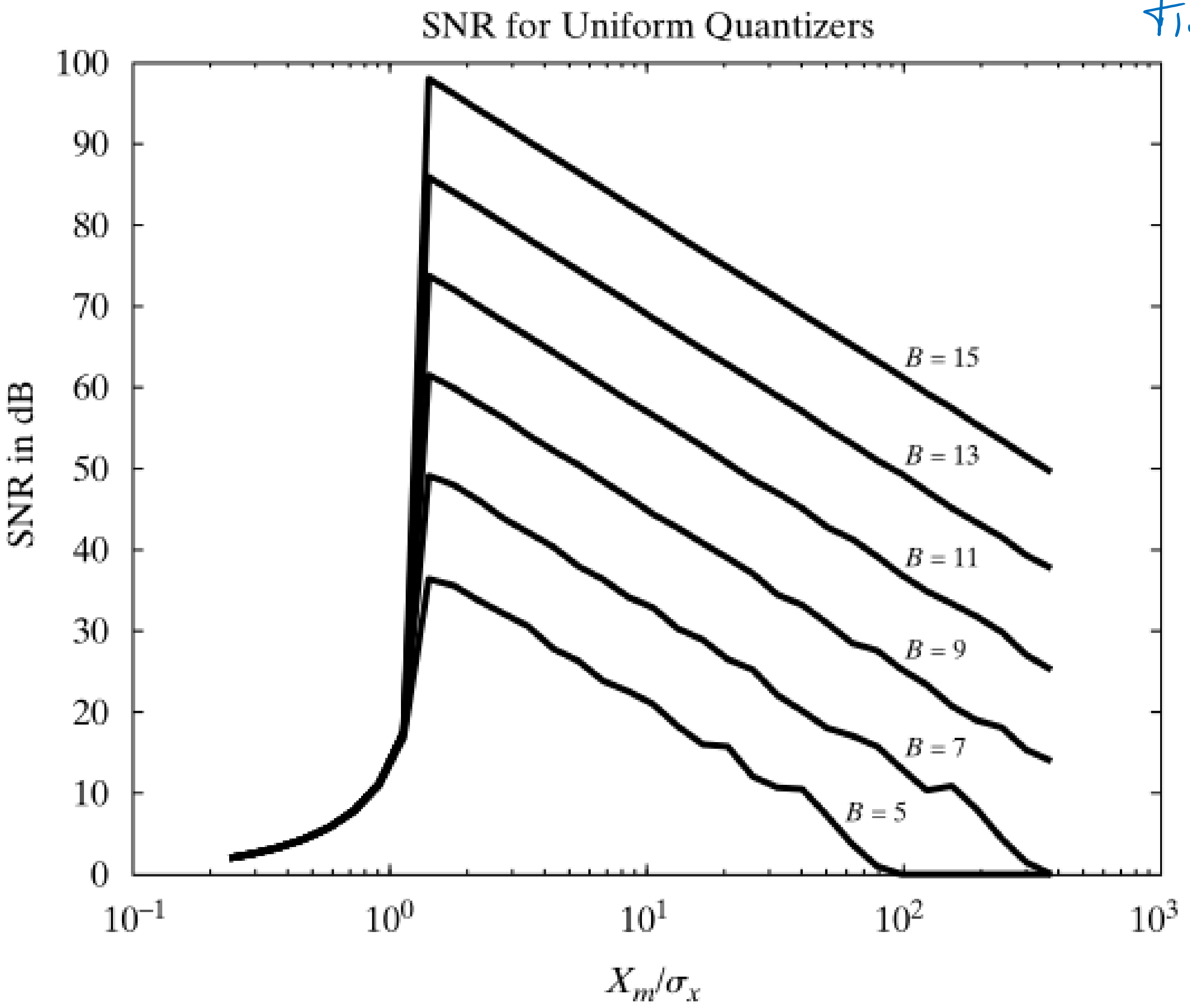


Figure 61 Signal-to-quantization-noise ratio as a function of X_m/σ_X for several values of B.

8.4 : تبدیل D/A :

$$x_{DA}(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \hat{x}[n]\, h_0(t-nT)$$

$\hat{x}[n] = x[n] + e[n]$ $\longrightarrow$

$$x_{DA}(t) = \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, h_0(t-nT)}_{x_0(t)} + \underbrace{\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e[n]\, h_0(t-nT)}_{e_0(t)} = x_0(t) + e_0(t)$$

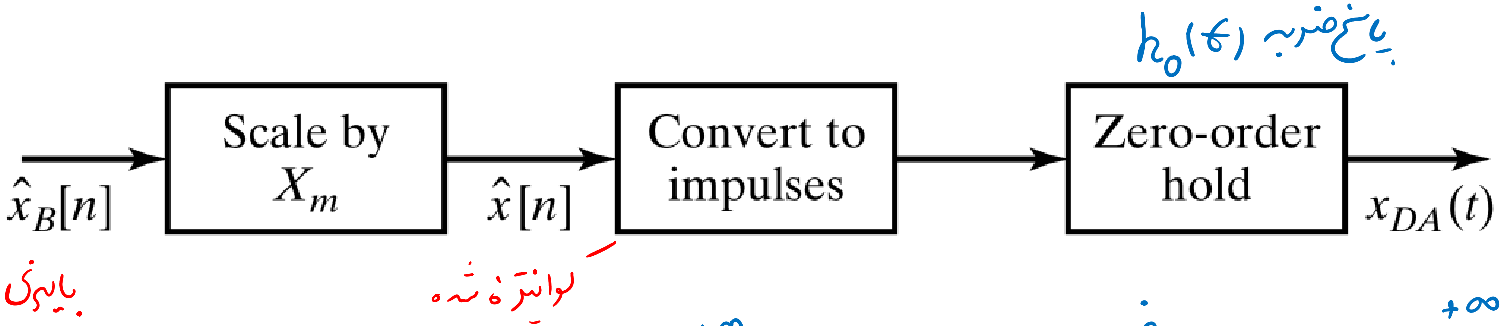


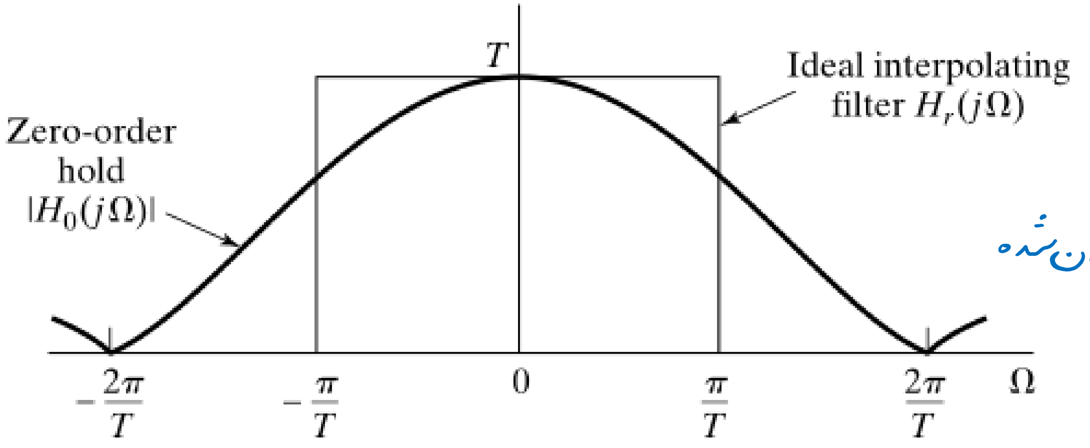
Figure 62 Block diagram of D/A converter.

$$x_0(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, h_0(t-nT) \xrightarrow{\text{فوریه}} X_0(j\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, H_0(j\Omega)\, e^{-j\Omega nT}$$

$$= \left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n]\, e^{-j\Omega T n}\right) H_0(j\Omega) = X(e^{j\Omega T})\, H_0(j\Omega)$$

$$\frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_a\!\left(j\left(\Omega - \frac{2\pi k}{T}\right)\right) \longrightarrow$$

$$X_0(j\Omega) = \left[\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} X_a\left(j\left(\Omega - \frac{2\pi k}{T}\right)\right)\right] H_0(j\Omega)$$



(a)

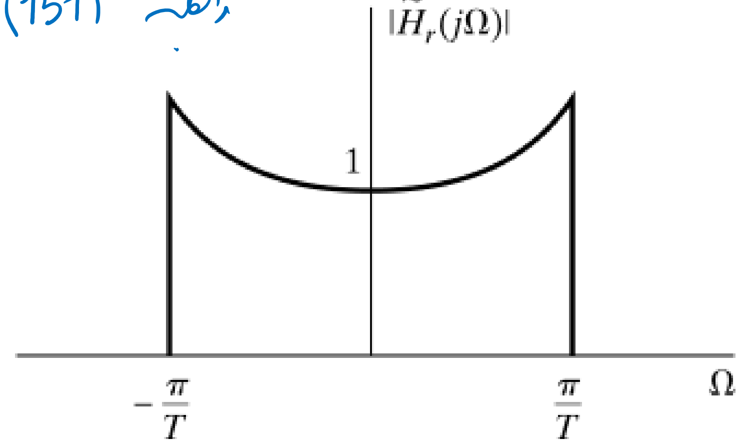
$$\tilde{H}_r(j\Omega) = \frac{H_r(j\Omega)}{H_0(j\Omega)}$$

فیلتر بازسازی ایده‌آل

پاسخ نگهدارنده مرتبه صفر

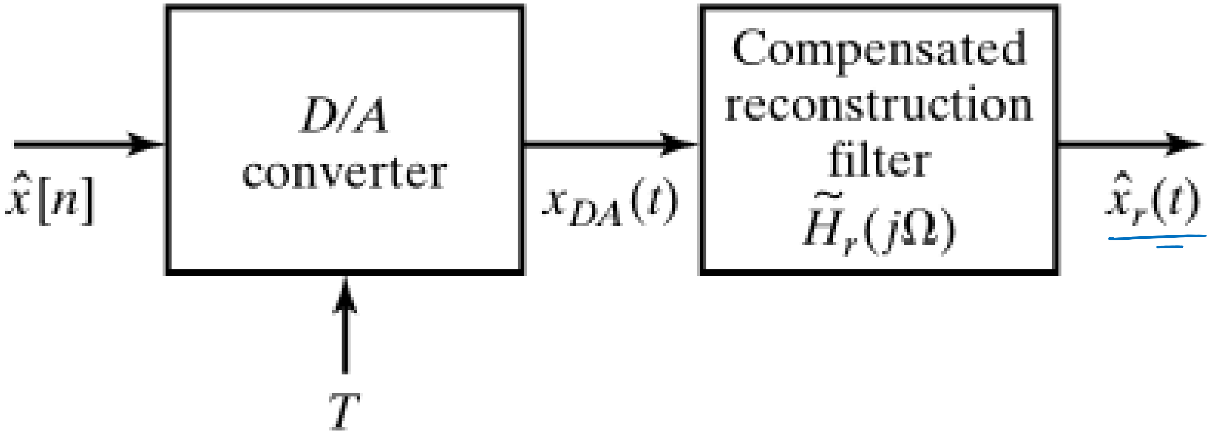
فیلتر بازسازی جبران شده

(151) رابطه



(b)

Figure 63 (a) Frequency response of zero-order hold compared with ideal interpolating filter. (b) Ideal compensated reconstruction filter for use with a zero-order-hold output.



سیگنال آنالوگ اولیه

$$\hat{x}_r(t) = x_a(t) + e_a(t)$$

نویز سفید جمع شونده باند محدود.

Figure 64 Physical configuration for D/A conversion.