Chapter 5

فصل پنجم : آنالیز حوزهٔ تبدیل سیستم های LTI :

Transform Analysis

مجموع کانولوشن

$$y[n] = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} x[k]\,h[n-k]$$

پاسخ ضربه

خروجی سیستم

ورودی سیستم

تبدیل Z

$$Y(z) = X(z)\,H(z)$$

تابع سیستم   system function

5.1 : پاسخ فرکانسی سیستم های LTI :

DTFT

تبدیل فوریه

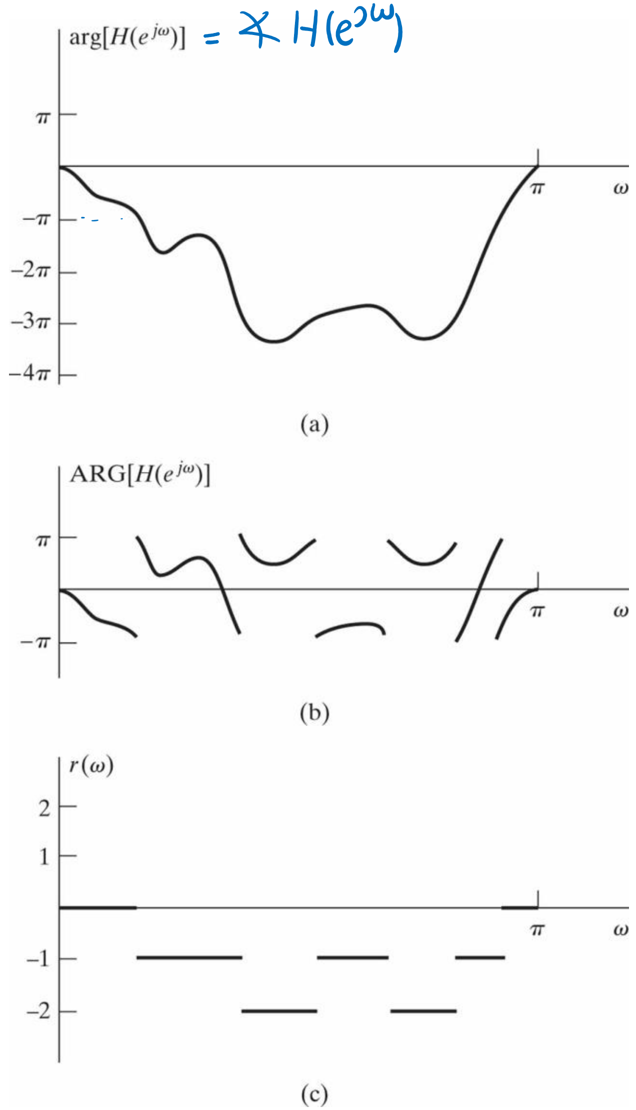
$$Y(e^{j\omega}) = X(e^{j\omega})\,H(e^{j\omega})$$

پاسخ فرکانسی

$$\begin{cases} |Y(e^{j\omega})| = |H(e^{j\omega})|\,|X(e^{j\omega})| & \text{اندازه} \\ \measuredangle Y(e^{j\omega}) = \measuredangle H(e^{j\omega}) + \measuredangle X(e^{j\omega}) & \text{فاز} \end{cases}$$

Figure 5.1 (a) Continuous-phase curve for a system function evaluated on the unit circle. (b) Principal value of the phase curve in part (a). (c) Integer multiples of 2π to be added to $\mathrm{ARG}[H(e^{j\omega})]$ to obtain $\arg[H(e^{j\omega})]$.

فاز پیوسته



$\measuredangle H(e^{j\omega}) = \mathrm{ARG}[H(e^{j\omega})] + ۲\pi r(\omega)$

$-\pi \leq \mathrm{ARG}[H(e^{j\omega})] \leq \pi$

تأخیر گروهی : Group Delay

group delay

$$\tau(\omega) = \mathrm{grd}[H(e^{j\omega})] = -\frac{d}{d\omega}\{\arg[H(e^{j\omega})]\}$$

مثال : سیستم تأخیر ایده‌آل :

$$h_{id}[n] = \delta[n-n_d]$$

$$H(e^{j\omega}) = e^{-j\omega n_d} \rightarrow \measuredangle H(e^{j\omega}) = -\omega n_d$$

$$|H(e^{j\omega})| = 1$$

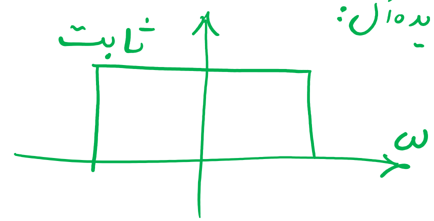
$$\tau(\omega) = \frac{-d}{d\omega}(-\omega n_d) = \underline{n_d}$$

واحد: Samples

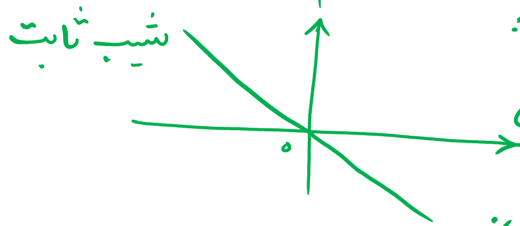
نمونه

سیستم ایده‌آل :

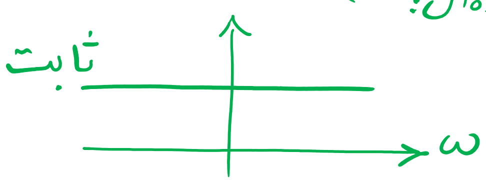
اندازه ایده‌آل:



فاز ایده‌آل:



grd ایده‌آل:



مثال: سیستم LTI با $H(Z)$ رابطهٔ زیر:

آنالیز $H(z)$: این فصل

پیاده‌سازی $H(Z)$: فصل ۶

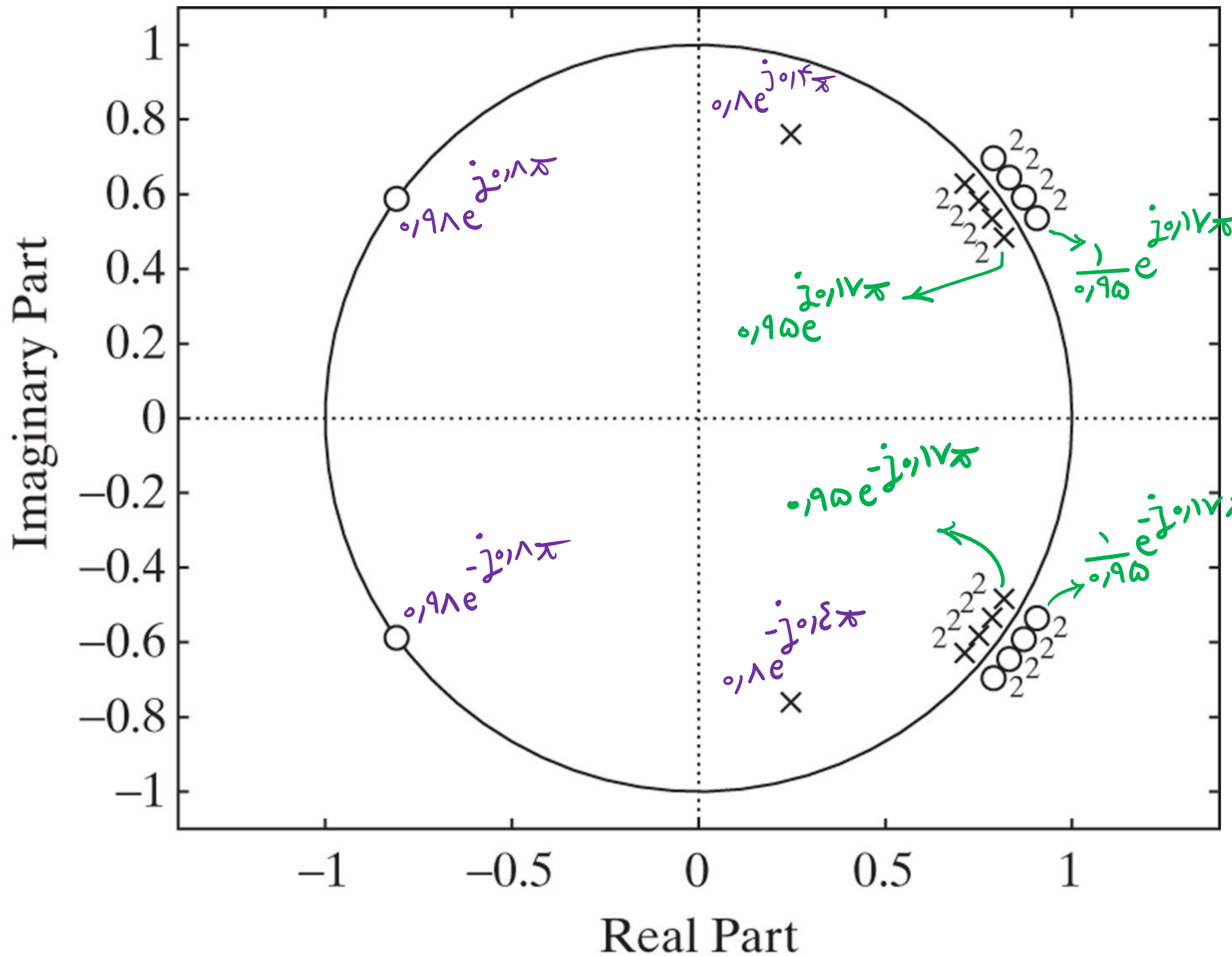
طراحی $H(Z)$: فصل ۷

نمودار صفر و قطب :

$$H(z) = \underbrace{\left(\frac{(1 - .98e^{j.8\pi}z^{-1})(1 - .98e^{-j.8\pi}z^{-1})}{(1 - .8e^{j.4\pi}z^{-1})(1 - .8e^{-j.4\pi}z^{-1})} \right)}_{H_1(z)} \underbrace{\prod_{k=1}^{4} \left(\frac{(c_k^* - z^{-1})(c_k - z^{-1})}{(1 - c_k z^{-1})(1 - c_k^* z^{-1})} \right)^2}_{H_2(z)} \qquad (15)$$

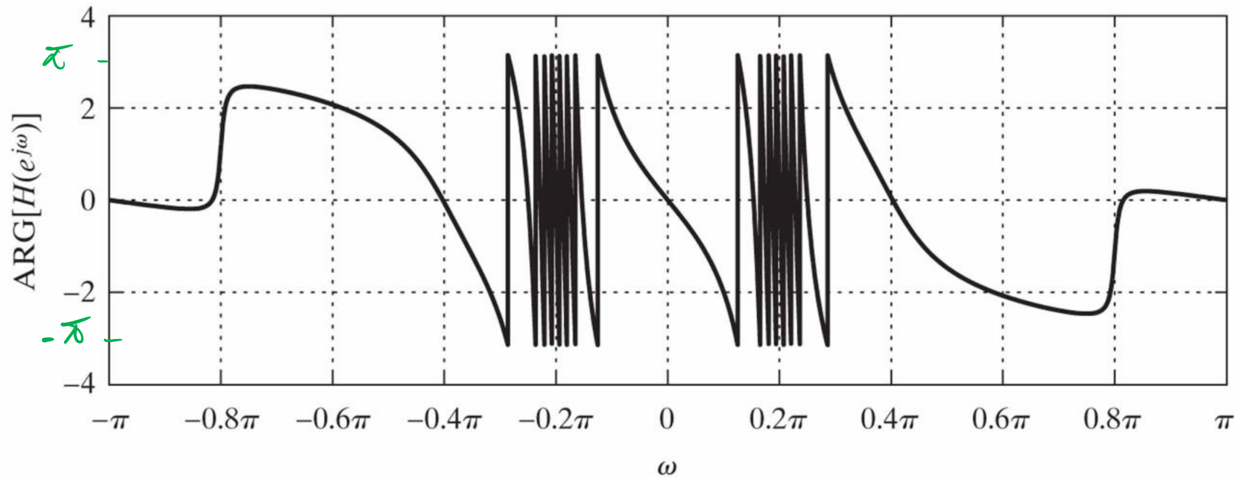
$c_k = 0.95\, e^{j(0.15\pi + 0.02\pi k)} \qquad k = 1, 2, \ldots, 4$

Figure 5.2 Pole-zero plot for the filter in the example of Section 5.1.2. (The number 2 indicates double-order poles and zeroes.)



فاز پاخ فرکانسی

Figure 5.3 Phase response functions for system in the example of Section 5.1.2; (a) Principal value phase, ARG[$H(e^{j\omega})$], (b) Continuous phase arg [$H(e^{j\omega})$].



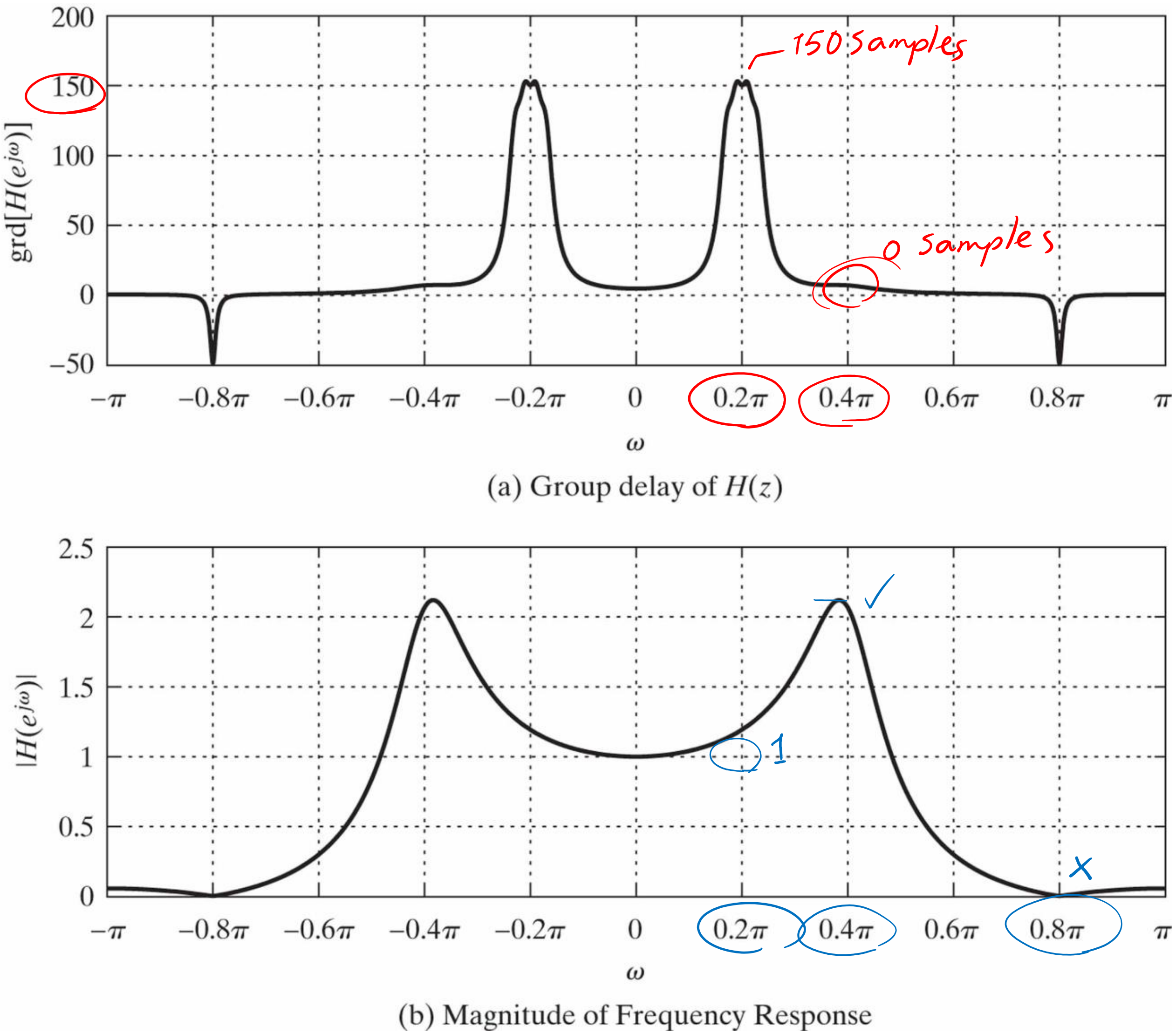
(a) Principle Value of Phase Response

(b) Unwrapped Phase Response

Figure 5.4 Frequency response of system in the example of Section 5.1.2; (a) Group delay function, grd[$H(e^{j\omega})$], (b) Magnitude of frequency response, $|H(e^{j\omega})|$.

تأخیر گروهی

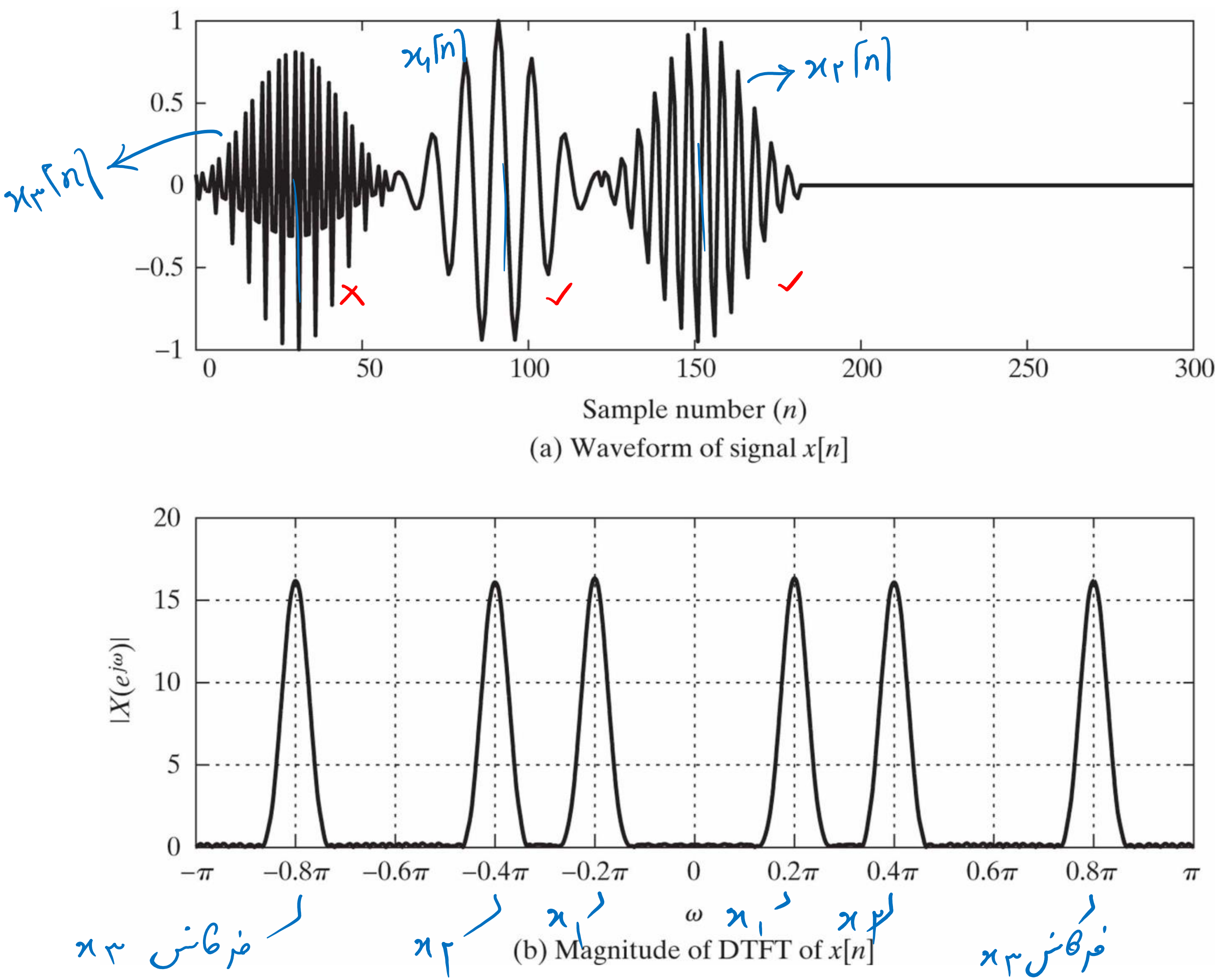
$grd[H(e^{j\omega})]$



$|H(e^{j\omega})|$

$x_1[n] = w[n]\cos(0.2\pi n)$, $x_3[n] = w[n]\cos(0.8\pi n + \frac{\pi}{5})$
$x_2[n] = w[n]\cos(0.4\pi n - \frac{\pi}{2})$

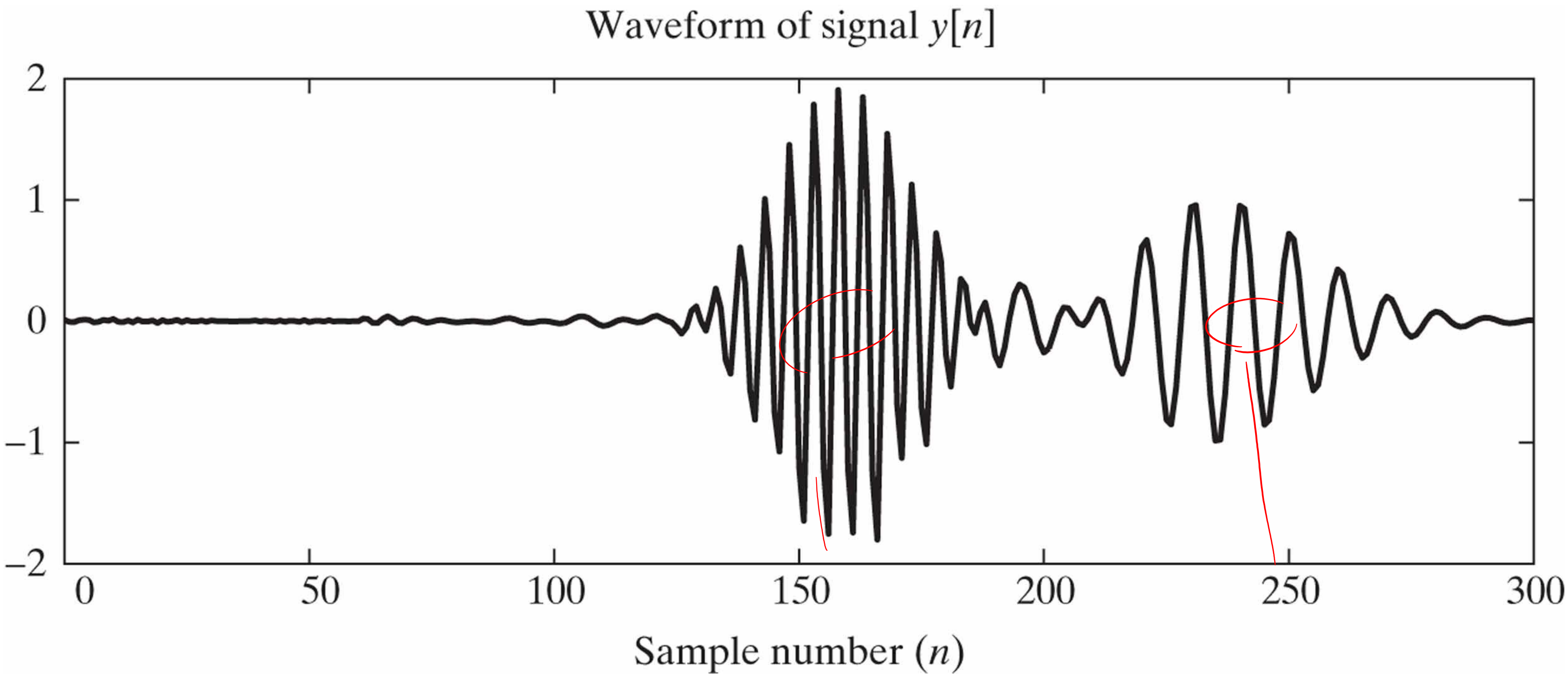
Figure 5.5 Input signal for example of Section 5.1.2; (a) Input signal $x[n]$, (b) Corresponding DTFT magnitude $|X(e^{j\omega})|$.



(a) Waveform of signal $x[n]$

(b) Magnitude of DTFT of $x[n]$

Figure 5.6 Output signal for the example of Section 5.1.2.



5.2 سیستم‌های توصیف شونده با معادلات تفاضلی خطی با ضرایب ثابت :

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

$$\xrightarrow{\mathcal{Z}} H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k z^{-k}}$$

$$= \left(\frac{b_0}{a_0}\right) \frac{\prod_{k=1}^{M} (1 - c_k z^{-1})}{\prod_{k=1}^{N} (1 - d_k z^{-1})}$$

مثال:

$$H(z) = \frac{(1+z^{-1})^{2}}{(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1+\frac{3}{4}z^{-1})} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$\frac{1+2z^{-1}+z^{-2}}{1+\frac{1}{4}z^{-1}-\frac{3}{8}z^{-2}} = \frac{Y(z)}{X(z)}$$

$$\xrightarrow{z^{-1}} \quad y[n]+\frac{1}{4}y[n-1]-\frac{3}{8}y[n-2] = x[n]+2x[n-1]+x[n-2]$$

5.2.1 پایداری و علی بودن :

پایداری $\quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n]| < \infty$

تبدیل z $\quad \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h[n] z^{-n}| < \infty$

$\rightarrow |z| = 1 \rightarrow$ دایرهٔ واحد

- شرط پایداری : ROC تابع سیستم شامل دایرهٔ واحد باشد.
- شرط علی بودن: ROC دست راستی باشد (خارج از بیرونی‌ترین قطب)

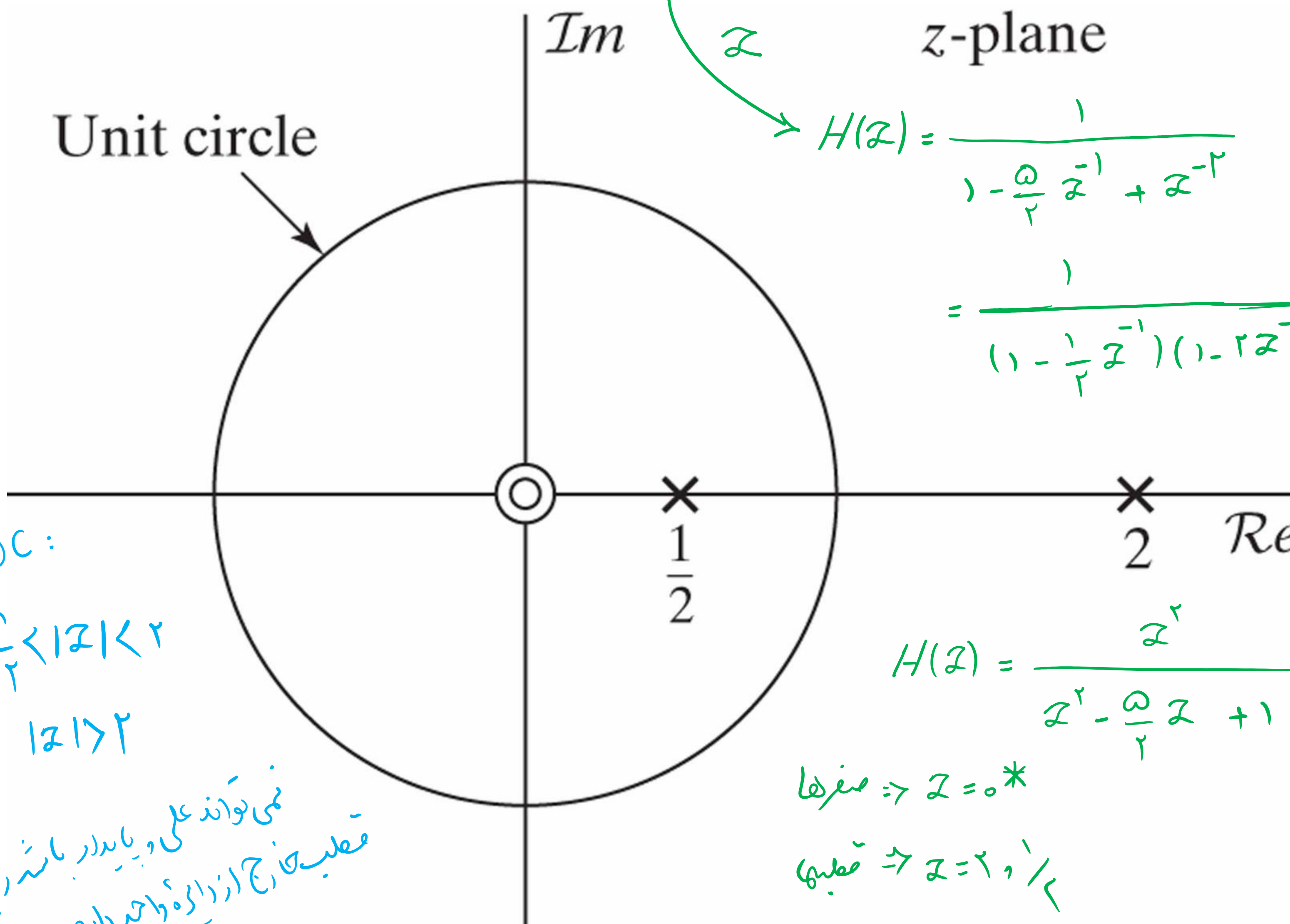
علی و پایدار $\leftarrow$ اگر تمام قطبهای سیستم داخل دایرهٔ واحد باشد.

مثال:

$$y[n] - \frac{5}{2}y[n-1] + y[n-2] = x[n]$$

$\mathcal{Z}$

Figure 5.7 Pole–zero plot for Example 5.2.



$$H(z) = \frac{1}{1 - \frac{5}{2}z^{-1} + z^{-2}}$$

$$= \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}z^{-1})(1 - 2z^{-1})}$$

$$H(z) = \frac{z^2}{z^2 - \frac{5}{2}z + 1}$$

صفرها $\Rightarrow z = 0$ *

قطبها $\Rightarrow z = 2, \frac{1}{2}$

ROC:

پایدار: $\frac{1}{2} < |z| < 2$

علی: $|z| > 2$

نمی‌تواند علی و پایدار باشد زیرا قطب خارج از دایرهٔ واحد دارد.

2.2 سیستم های معکوس:

همانی $G(z) = H(z)H_i(z) = 1$

$$H_i(z) = \frac{1}{H(z)}$$

$$g[n] = h[n] * h_i[n] = \delta[n]$$

$$H_i(e^{j\omega}) = \frac{1}{H(e^{j\omega})}$$

log اندازه، فاز و تأخیر گروهی برای سیستم وارون، منفی این مقدار برای سیستم اصلی است.

$$H(z) = \left(\frac{b_0}{a_0}\right)\frac{\prod_{k=1}^{M}(1-c_kz^{-1})}{\prod_{k=1}^{N}(1-d_kz^{-1})} \longrightarrow H_i(z) = \left(\frac{a_0}{b_0}\right)\frac{\prod_{k=1}^{N}(1-d_kz^{-1})}{\prod_{k=1}^{M}(1-c_kz^{-1})}$$

قطبها به صفر و صفرها به قطب تبدیل می شوند.

علی

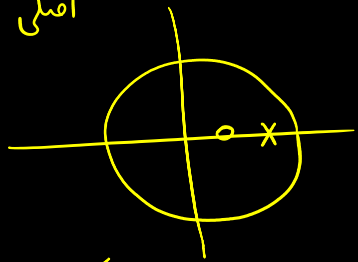
ROC: $|z| > \max_k |d_k|$

ROC: هر ناحیه همگرایی که با ROC سیستم اصلی هم پوشانی داشته باشد.

مثال:

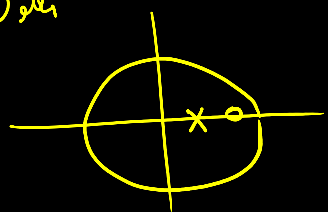
$$H(z) = \frac{1-0.5z^{-1}}{1-0.9z^{-1}} \quad ; \quad |z|>0.9$$ علی و پایدار

اصلی



$$H_i(z) = \frac{1-0.9z^{-1}}{1-0.5z^{-1}} \quad ; \quad |z|>0.5$$ علی و پایدار

معکوس

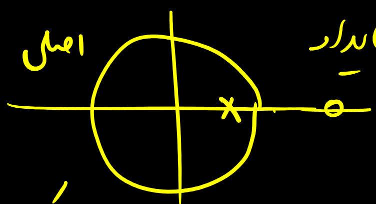


$$h_i[n] = (0.5)^n u[n] - 0.9(0.5)^{n-1} u[n-1]$$

مثال:

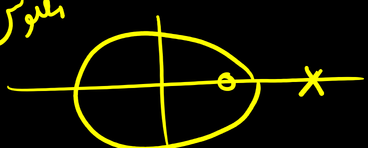
$$H(z) = \frac{z^{-1}-0.5}{1-0.9z^{-1}} \quad ; \quad |z|>0.9$$

اصلی



علی و پایدار

معکوس



$$H_i(z) = \frac{1-0.9z^{-1}}{z^{-1}-0.5} \quad ;$$

$\times -2$

$$H_i(z) = \frac{-2+1.8z^{-1}}{1-2z^{-1}}$$

علی و ناپایدار

$$|z|>2 \rightarrow h_i[n] = -2(2)^n u[n] + 1.8(2)^{n-1} u[n-1]$$

$$|z|<2 \rightarrow h_i[n] = 2(2)^n u[-n-1] - 1.8(2)^{n-1} u[-n]$$

غیرعلی و پایدار

نتیجه مهم: برای اینکه سیستم معکوس علی و پایدار باشد، باید صفرهای سیستم اصلی نیز داخل دایره واحد باشند.

سیستم minimum-phase کمینه فاز :

سیستمی است که هم خود سیستم و هم وارون آن علی و پایدار باشد

شرط : همه صفرها و قطبهای سیستم باید داخل دایره واحد باشند

5.2.3 پاسخ ضربه تابع سیستم های گویا:

دسته سیستم های IIR:

نامحدود

$$H(z) = \sum_{r=0}^{M-N} B_r z^{-r} + \sum_{k=1}^{N} \frac{A_k}{1 - d_k z^{-k}}$$

$$\xrightarrow{z^{-1}} \quad h[n] = \underbrace{\sum_{r=0}^{M-N} B_r \delta[n-r]} + \sum_{k=1}^{N} A_k d_k^{n} u[n]$$

جمله اول تنها زمانی ظاهر میشود که $M \geq N$ باشد

دسته سیستم های FIR:

محدود

$$H(z) = \sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}$$

همواره پایدار

$$\xrightarrow{z^{-1}} \quad h[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k \delta[n-k] = \begin{cases} b_n ; & 0 \leq n \leq M \\ 0 ; & o.w. \end{cases}$$

PEARSON

مثال از FIR:

$$h[n] = \begin{cases} a^n & ; \quad 0 \leq n \leq M \\ 0 & ; \quad o.w. \end{cases}$$

$\mathcal{Z}$

$$H(z) = \sum_{n=0}^{M} a^n z^{-n} = \frac{1 - a^{M+1} z^{-M-1}}{1 - a z^{-1}}$$

صفرها: ریشه‌های صورت:

$$z^{M+1} = a^{M+1} \longrightarrow z_k = a e^{j\frac{2\pi k}{M+1}} \quad ; \quad k = 0, 1, 2, \dots, M$$

صفر در $z=a$ با قطب در $z=a$ حذف می‌شود.

درنتیجه M صفر خواهیم داشت.

شکل برای $M=7$ اسلاید بعد

معادل
$$\begin{cases} y[n] - a y[n-1] = x[n] - a^{M+1} x[n-M-1] \\ y[n] = \sum_{k=0}^{M} a^n x[n-k] \end{cases}$$

PEARSON

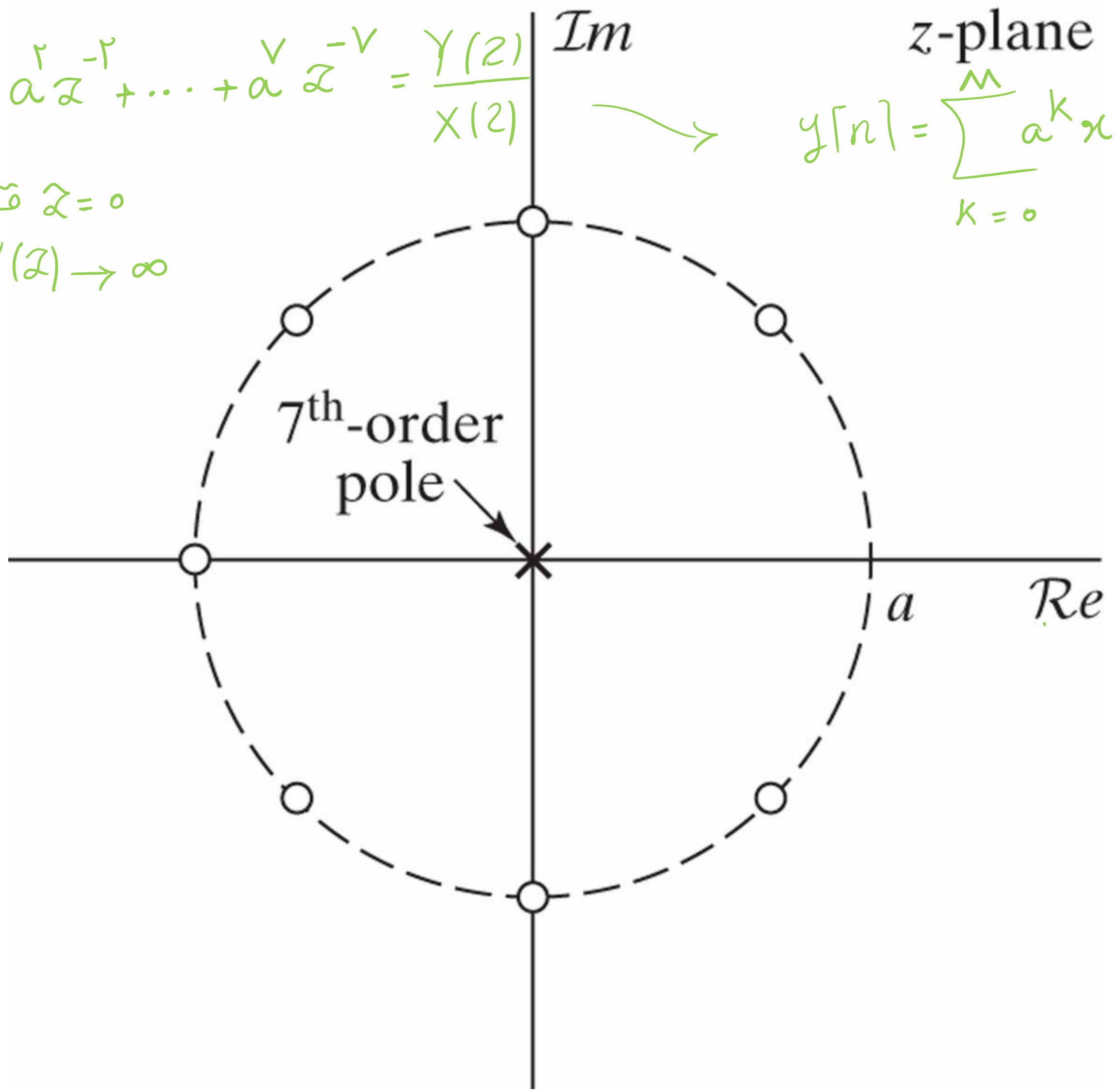
سیستم FIR به استثنای قطب در صفر یا ∞، قطب دیگری ندارد.

Figure 5.8 Pole–zero plot for Example 5.5.

$$H(z) = 1 + a z^{-1} + a^{2} z^{-2} + \cdots + a^{7} z^{-7} = \frac{Y(z)}{X(z)} \longrightarrow y[n] = \sum_{k=0}^{M} a^{k} x[n-k]$$

$z=0$ قطب مرتبه ۷ $\frac{1}{z^{7}}$

$H(z) \to \infty$



5.3 پاسخ فرکانسی برای تابع سیستم گویا:

$$H(e^{j\omega}) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k e^{-j\omega k}}{\sum_{k=0}^{N} a_k e^{-j\omega k}} = \left(\frac{b_0}{a_0}\right) \frac{\prod_{k=1}^{M}(1-c_k e^{-j\omega})}{\prod_{k=1}^{N}(1-d_k e^{-j\omega})}$$

نتیجه $\xrightarrow{\text{اندازه}}$ $$|H(e^{j\omega})| = \left|\frac{b_0}{a_0}\right| \frac{\prod_{k=1}^{M} |1-c_k e^{-j\omega}|}{\prod_{k=1}^{N} |1-d_k e^{-j\omega}|}$$

$\xrightarrow{\text{مربع اندازه}}$ $$|H(e^{j\omega})|^2 = H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega}) = \left(\frac{b_0}{a_0}\right)^2 \frac{\prod_{k=1}^{M}(1-c_k e^{-j\omega})(1-c_k^* e^{j\omega})}{\prod_{k=1}^{N}(1-d_k e^{-j\omega})(1-d_k^* e^{j\omega})}$$

Gain

dB بر حسب $\rightarrow$ $$20\log_{10}|H(e^{j\omega})|$$

$$= 20\log_{10}\left|\frac{b_0}{a_0}\right| + \sum_{k=1}^{M} 20\log_{10}|1-c_k e^{-j\omega}| - \sum_{k=1}^{N} 20\log_{10}|1-d_k e^{-j\omega}|$$

فاز پیوسته $\longrightarrow \arg[H(e^{j\omega})] = \arg\left(\frac{b_0}{a_0}\right) + \sum_{k=1}^{M} \arg[1 - c_k e^{-j\omega}] - \sum_{k=1}^{N} \arg[1 - d_k e^{-j\omega}]$

$$\mathrm{grd}[H(e^{j\omega})] = \sum_{k=1}^{N} \frac{d}{d\omega}\left(\arg[1 - d_k e^{-j\omega}]\right) - \sum_{k=1}^{M} \frac{d}{d\omega}\left(\arg[1 - c_k e^{-j\omega}]\right)$$

و رابطه (53) برای grd

قضیه: برای $H(z)$ کسری از روی نمودار صفر و قطب می‌توان پاسخ فرکانسی را از روابط زیر می‌گیرد:

$$\begin{cases} 20\log_{10}|H(e^{j\omega})| = \text{ثابت} + \sum\limits_{k=1}^{\text{تعداد صفرهای متناهی}} 20\log_{10}|v_z(k,\omega)| - \sum\limits_{k=1}^{\text{تعداد قطبهای متناهی}} 20\log_{10}|v_p(k,\omega)| \\ \measuredangle H(e^{j\omega}) = \text{ثابت} + \sum\limits_{k=1}^{\text{تعداد صفرهای متناهی}} \measuredangle v_z(k,\omega) - \sum\limits_{k=1}^{\text{تعداد قطبهای متناهی}} \measuredangle v_p(k,\omega) \end{cases}$$

$v_z(k,\omega)$ و $v_p(k,\omega)$ بردارهایی از محل $\frac{\text{صفر}}{\text{قطب}}$ k ام تا نقطه $e^{j\omega}$ روی دایره واحد

نتایج : ۱- صفر یا قطب در ∞ اثری در اندازه و فاز پاسخ فرکانسی ندارند. (آنچه گفته شده برای صفر و قطبهای تنها)

۲- صفر یا قطب در مبدأ اثری در اندازه ندارند.

$\log 1 = 0$

۳- صفر در مبدأ فاز خطی $+\omega$ ایجاد می‌کند.

$\angle \omega$

قطب در مبدأ فاز خطی $-\omega$ ایجاد می‌کند.

صفر و قطب در مبدأ در سیستم اثری ندارند. (فاز ایده‌آل)

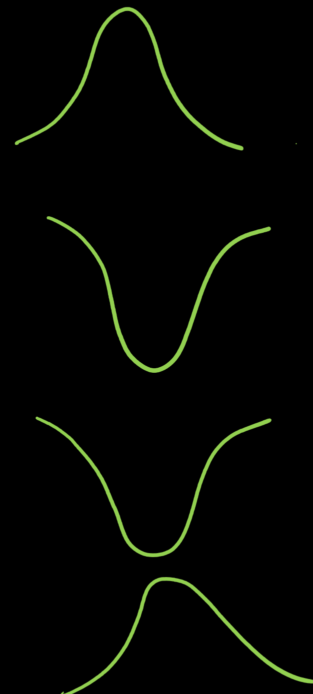
۴- با نزدیک شدن به صفر، اندازه کم می‌شود.

با نزدیک شدن به قطب، اندازه زیاد می‌شود.

۵- در کل صفر روی دایره واحد: اندازه: $-\infty\,dB$

در کل قطب روی دایره واحد: اندازه: $\infty\,dB$

۶- اثرات روی grd :



صفر بیرون دایرهٔ واحد

صفر داخل دایرهٔ واحد

قطب بیرون دایرهٔ واحد

قطب داخل دایرهٔ واحد

و هرچه صفر و قطب به دایرهٔ واحد نزدیکتر شوند پیک‌ها نمایان شدیدتری شود.

سیستم با فقط یک صفر

Figure 5.9 Frequency response for a single zero, with $r = 0.9$ and the three values of θ shown. (a) Log magnitude. (b) Phase. (c) Group delay.

$(1 - re^{j\theta} e^{-j\omega})$

صفر : $re^{j\theta}$

به ازای θ های متفاوت و $r = 0.9$

اندازه پاسخ فرکانسی برحسب dB

$20 \log_{10} |H(e^{j\omega})|$

$\theta = 0$

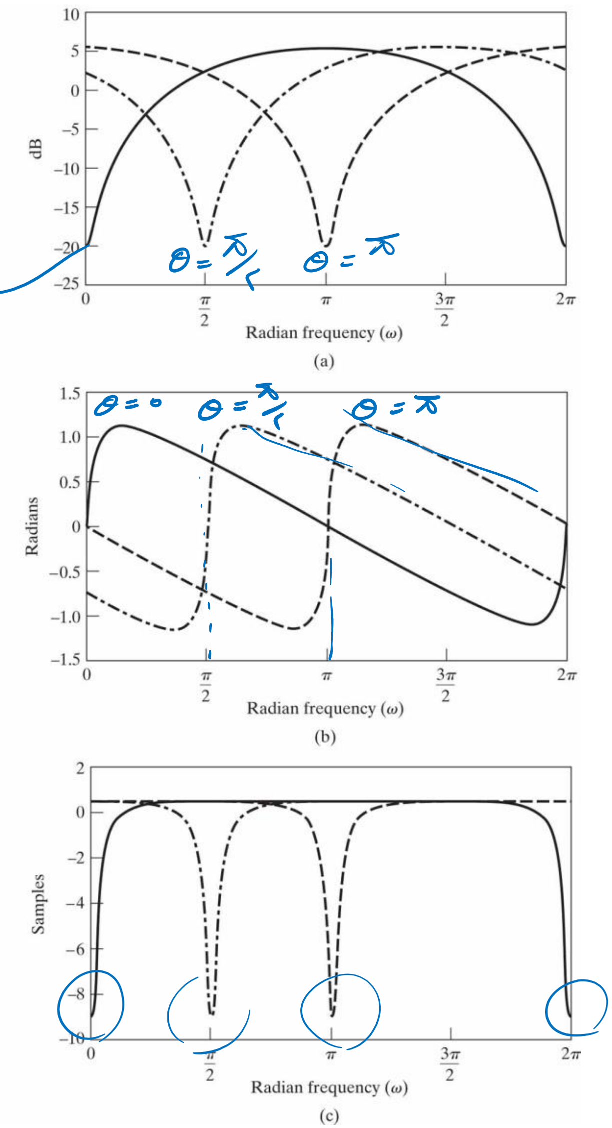
فاز $\angle H(e^{j\omega})$

$r = 0.9$ نزدیک به یک

تاخیر گروهی $grd[H(e^{j\omega})]$

صفر داخل دایره واحد $r = 0.9$

null



θ = 0
θ = π/2
θ = π

Figure 5.10 *z* -plane vectors for a 1^{st}-order system function evaluated on the unit circle, with $r < 1$.

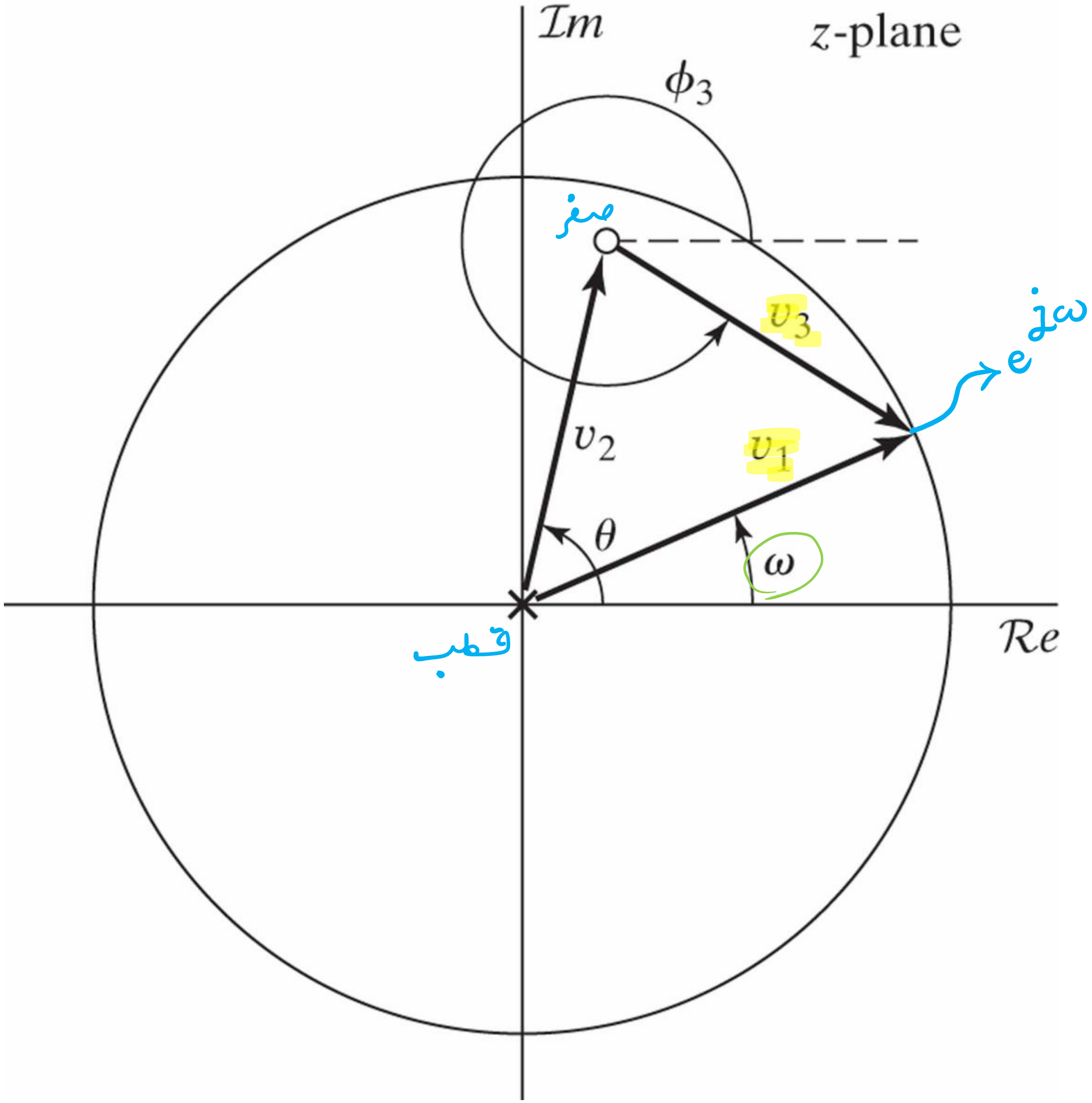


Figure 5.11 Frequency response for a single zero, with $\theta = \pi$, $r = 1$, 0.9, 0.7, and 0.5. (a) Log magnitude. (b) Phase. (c) Group delay for $r = 0.9$, 0.7, and 0.5.

سیستم با فقط یک صفر

$\theta = \pi$

به ازای r های مختلف

اندازه

$r=1$: صفر روی دایره واحد

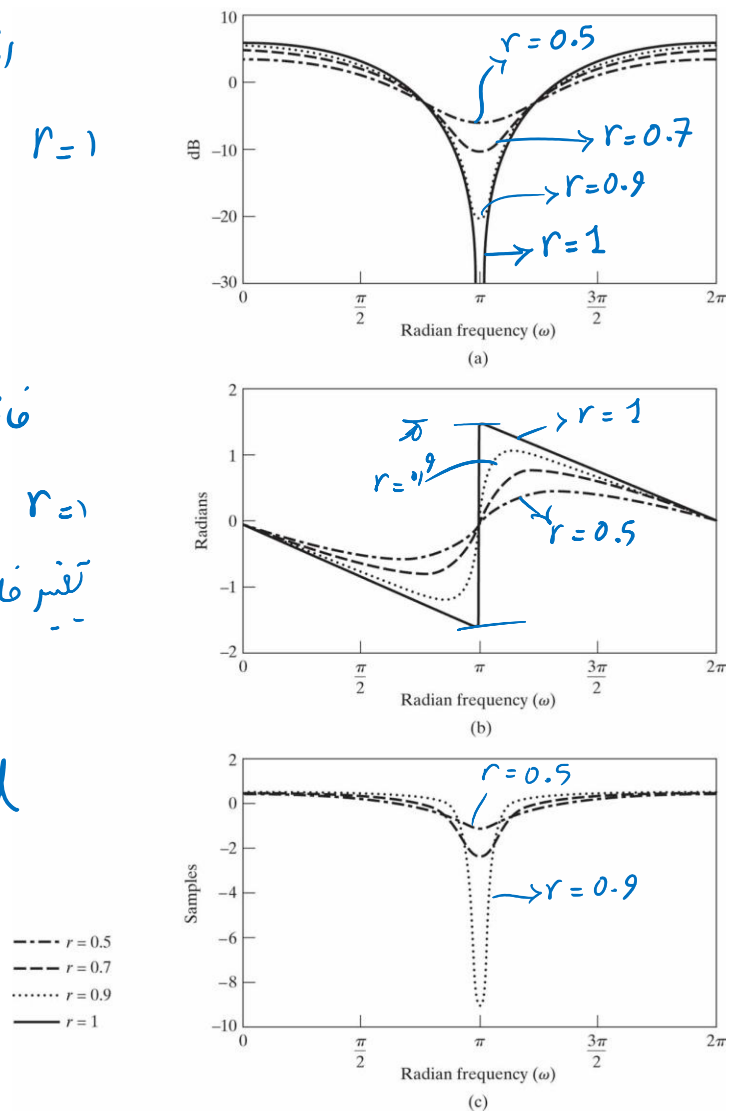
فاز

$r=1$: صفر روی دایره واحد

تغییر فاز به اندازه π

grd

$r=1$: تعریف نشده : نمایش داده شده



مثال :

دو صفر در مبدء

دو قطب در $re^{\pm j\theta}$

$$H(z) = \frac{1}{(1 - re^{j\theta}z^{-1})(1 - re^{-j\theta}z^{-1})} = \frac{1}{1 - 2r\cos\theta z^{-1} + r^2 z^{-2}}.$$

$$\begin{aligned} 20\log_{10}|H(e^{j\omega})| = &- 10\log_{10}[1 + r^2 - 2r\cos(\omega - \theta)] \\ &- 10\log_{10}[1 + r^2 - 2r\cos(\omega + \theta)], \end{aligned}$$

$$\angle H(e^{j\omega}) = -\arctan\left[\frac{r\sin(\omega - \theta)}{1 - r\cos(\omega - \theta)}\right] - \arctan\left[\frac{r\sin(\omega + \theta)}{1 - r\cos(\omega + \theta)}\right],$$

and

$$\mathrm{grd}[H(e^{j\omega})] = -\frac{r^2 - r\cos(\omega - \theta)}{1 + r^2 - 2r\cos(\omega - \theta)} - \frac{r^2 - r\cos(\omega + \theta)}{1 + r^2 - 2r\cos(\omega + \theta)}.$$

Figure 5.12 Pole–zero plot for Example 5.6.

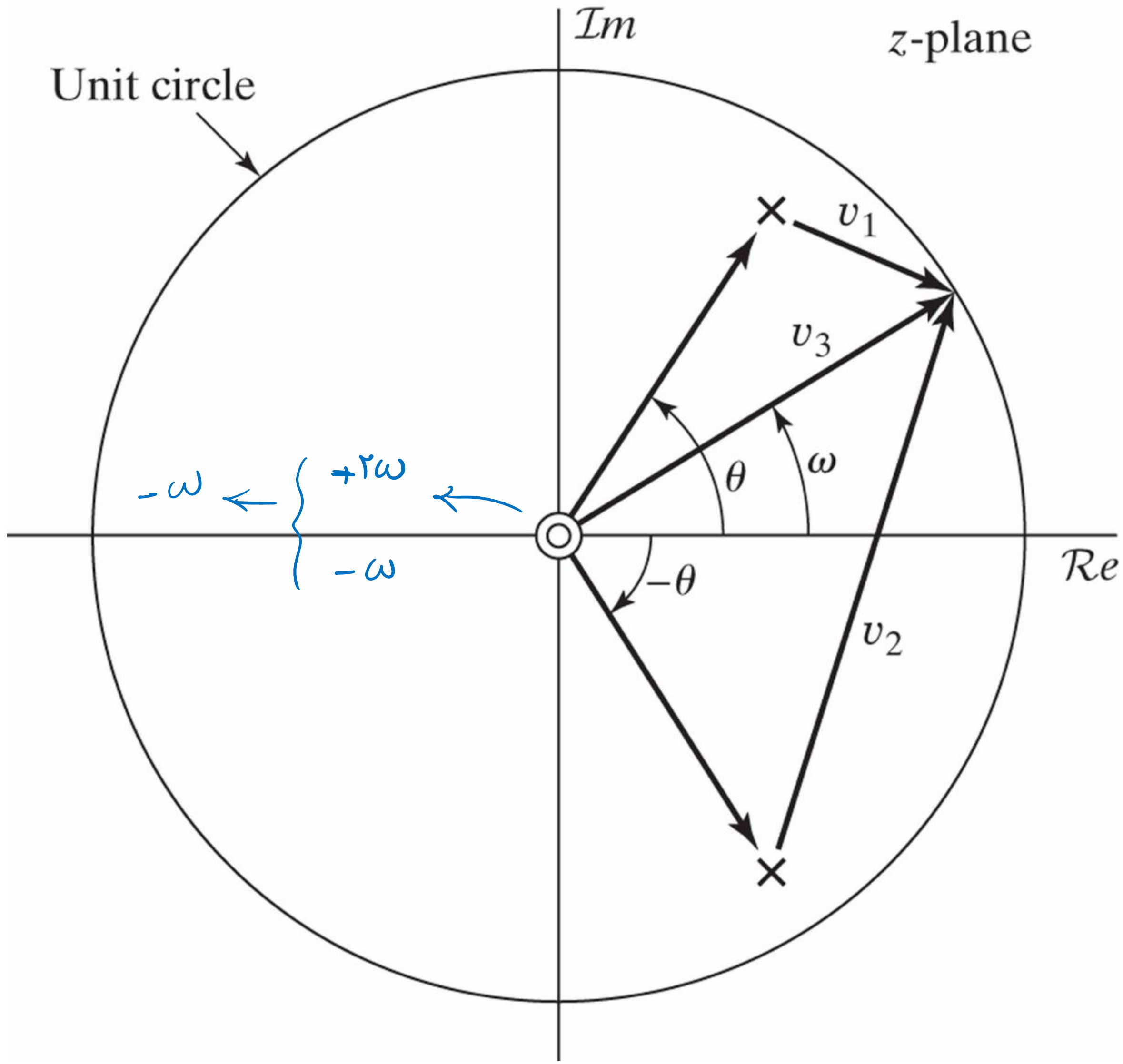


Figure 5.13 Frequency response for a complex-conjugate pair of poles as in Example 5.6, with $r = 0.9$, $\theta = \pi/4$. (a) Log magnitude.

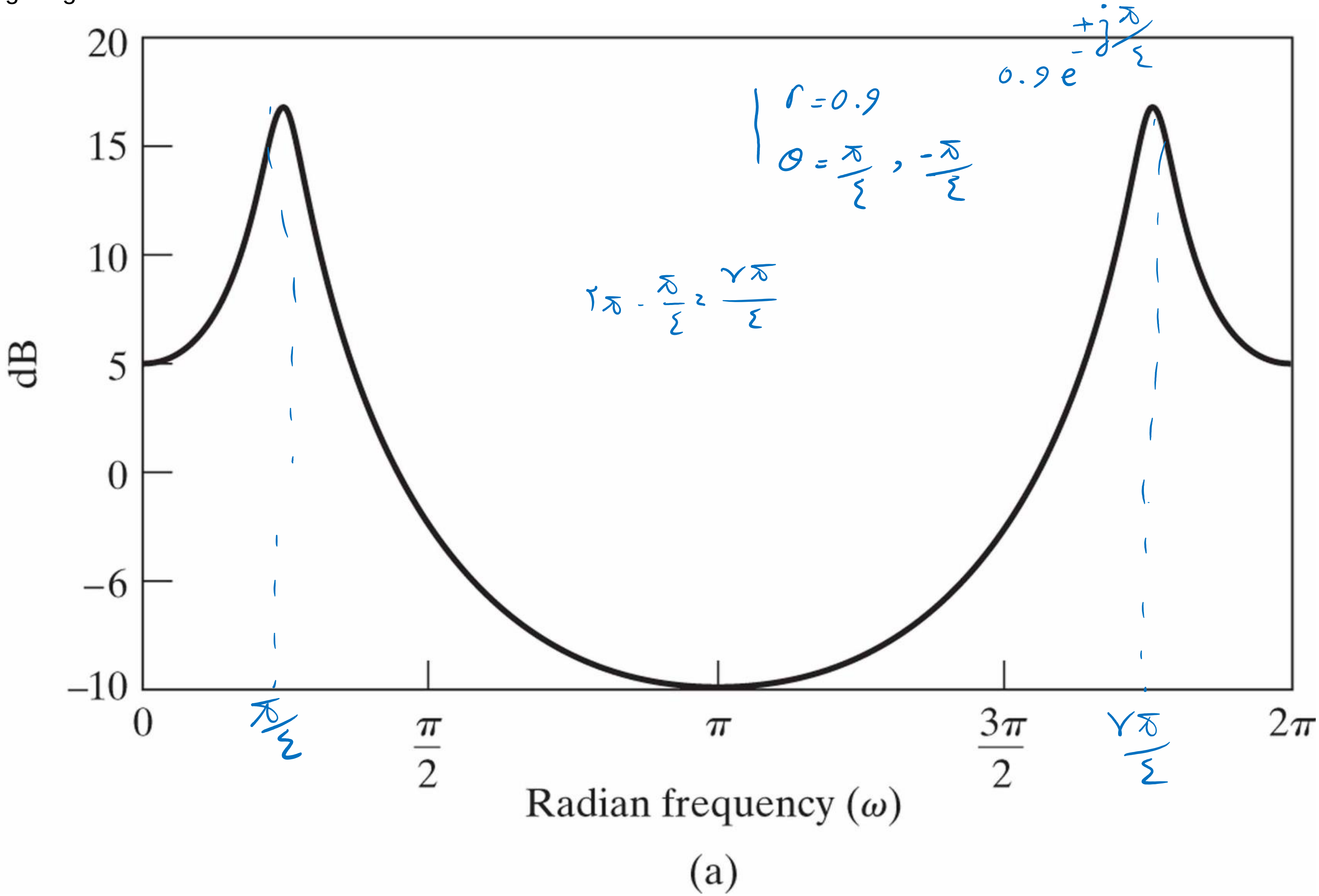
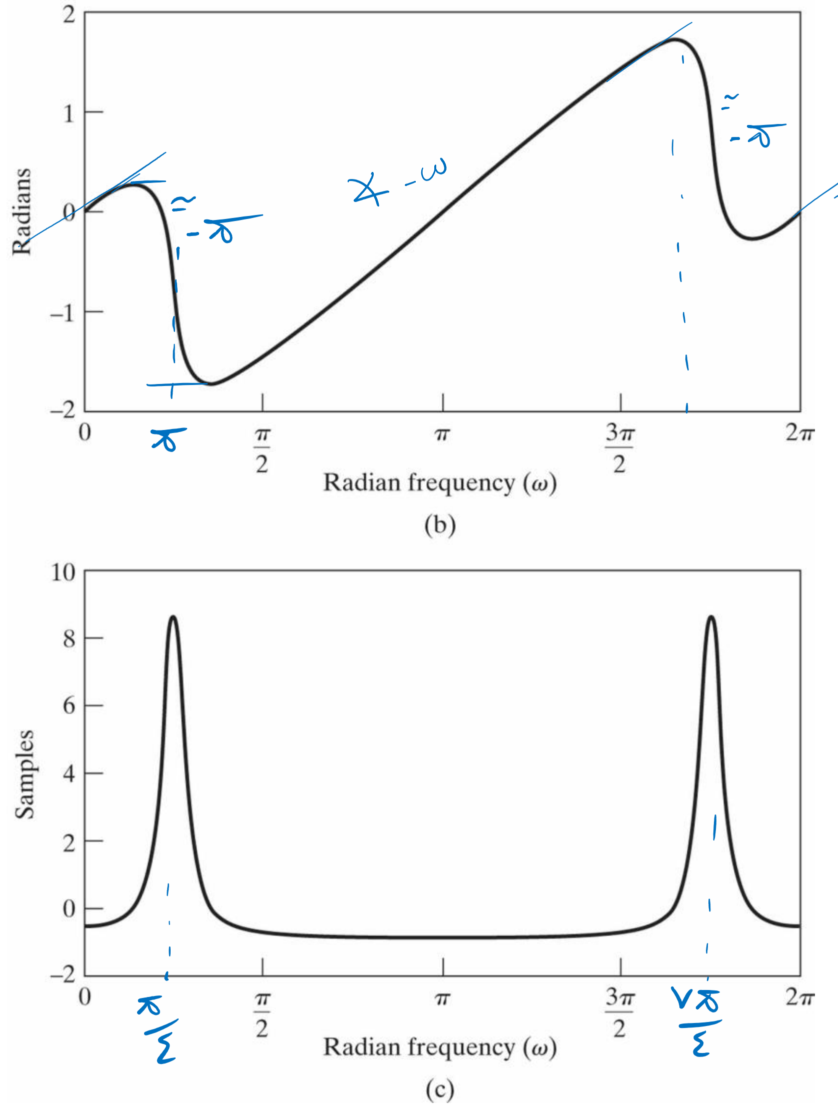


Figure 5.13 (*continued*) Frequency response for a complex-conjugate pair of poles as in Example 5.6, with $r = 0.9$, $\theta = \pi/4$. (b) Phase. (c) Group delay.

قطبها

θ ، $-\theta$



$$H(z) = \frac{0.05634(1 + z^{-1})(1 - 1.0166z^{-1} + z^{-2})}{(1 - 0.683z^{-1})(1 - 1.4461z^{-1} + 0.7957z^{-2})}, \tag{67}$$

Radius	Angle
1	π rad
1	± 1.0376 rad (59.45°)

Radius	Angle
0.683	0
0.892	± 0.6257 rad (35.85°)

Figure 5.14 Pole–zero plot for the lowpass filter of Example 5.8.

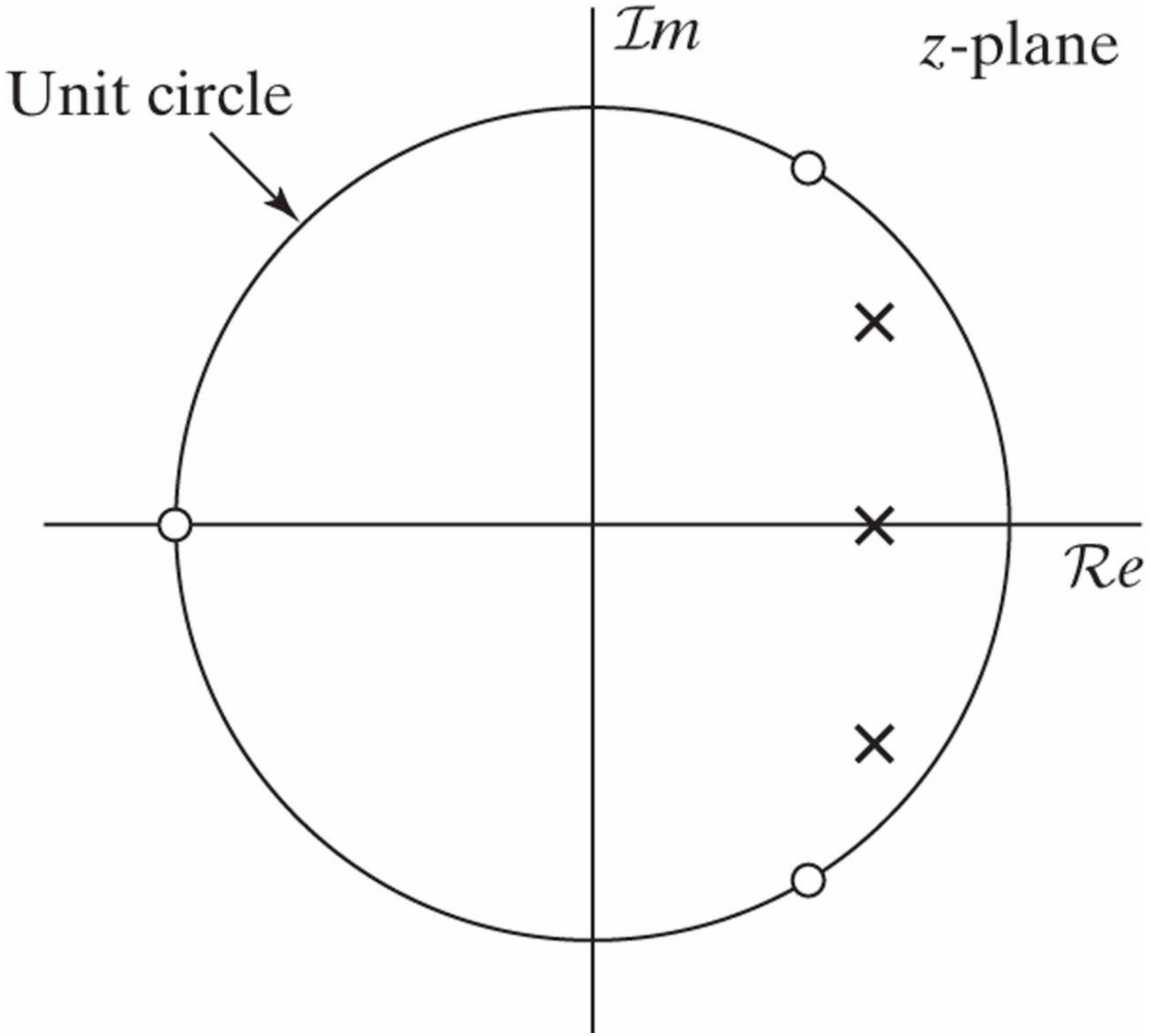
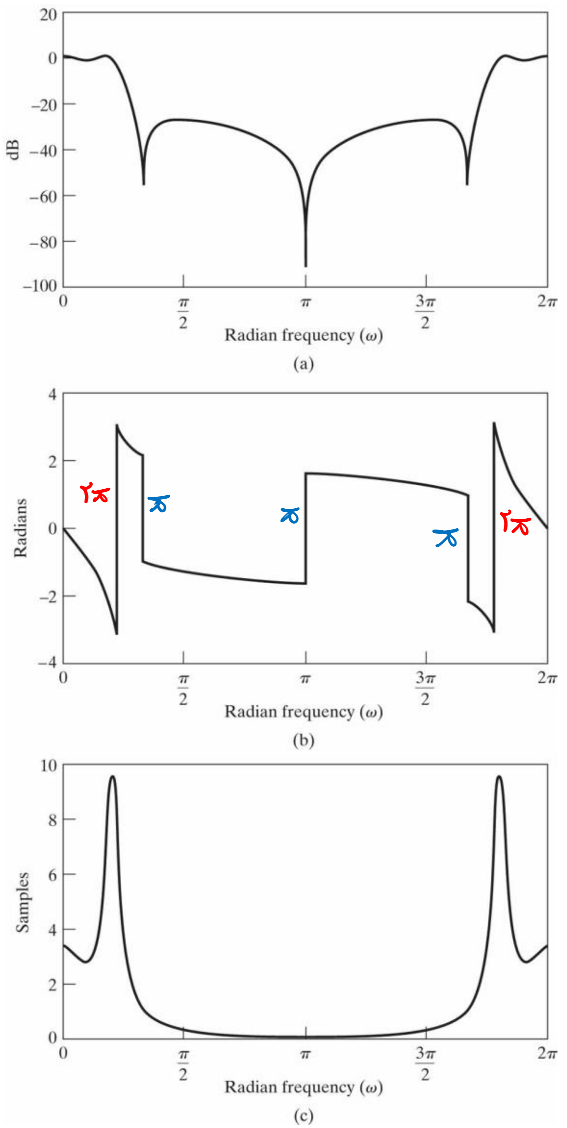


Figure 5.15 Frequency response for the lowpass filter of Example 5.8. (a) Log magnitude. (b) Phase. (c) Group delay.



5.4 رابطهٔ بین اندازه و فاز :

فرض : $|H(e^{j\omega})|$ داده شده و می‌دانیم $|H(e^{j\omega})|$ مرتبط با یک $H(z)$ کسری است.

مسئله :
- آیا می‌توان به $H(z)$ رسید؟
- به چه روشی؟
- آیا پاسخ یکتاست؟

$$
\begin{tikzcd}
|H(e^{j\omega})| \arrow[r] \arrow[drr] & H(z) \arrow[r] & H(e^{j\omega}) \arrow[d] \\
 & & \measuredangle H(e^{j\omega})
\end{tikzcd}
$$

در حالت کلی این امکان وجود ندارد.

در حالت $H(z)$ کسری می‌توان این کار را انجام داد.

$$|H(e^{j\omega})| \xrightarrow[\text{بی‌شمار}]{} H(z)$$

شرط : کمترین تعداد صفر و قطب.

((اندازه پاسخ فرکانسی ← متناظر با صفر و قطب‌ها ← زاویهٔ خاصی ایجاد می‌کند))

قضیه: تعداد سیستم های LTI پایدار با $H(z)$ کسری که دارای $|H(e^{j\omega})|$ یکسان و تعداد یکسان صفر و قطب هستند (با صرف‌نظر از ضریب $e^{j\theta}$) متناهی است و همهٔ این $H(z)$ ها را می‌توان با داشتن فقط $|H(e^{j\omega})|$ به دست آورد.

الگوریتم برای به دست آوردن $H(z)$:

$$|H(e^{j\omega})|$$

$$\downarrow$$

$$|H(e^{j\omega})|^2\Big|_{e^{j\omega}=z} = \overbrace{H(z)H^*\left(\frac{1}{z^*}\right)}^{C(z)}$$

$$\downarrow$$

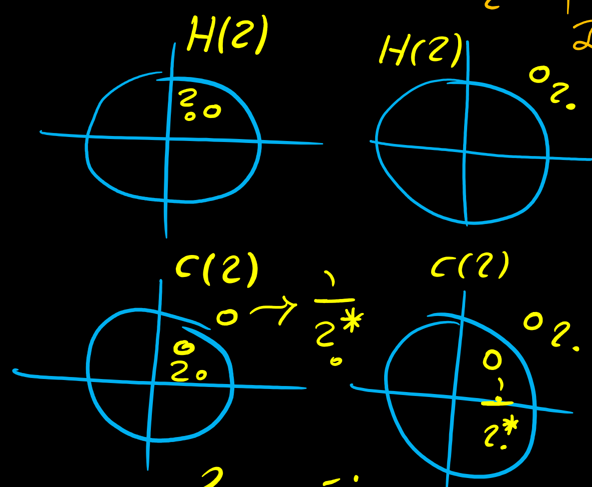
صفر و قطب های $C(z)$ را به دست می‌آوریم و نمودار صفر و قطب را رسم می‌کنیم

$$\downarrow$$

از هر جفت صفر و قطب یکی را انتخاب می‌کنیم.

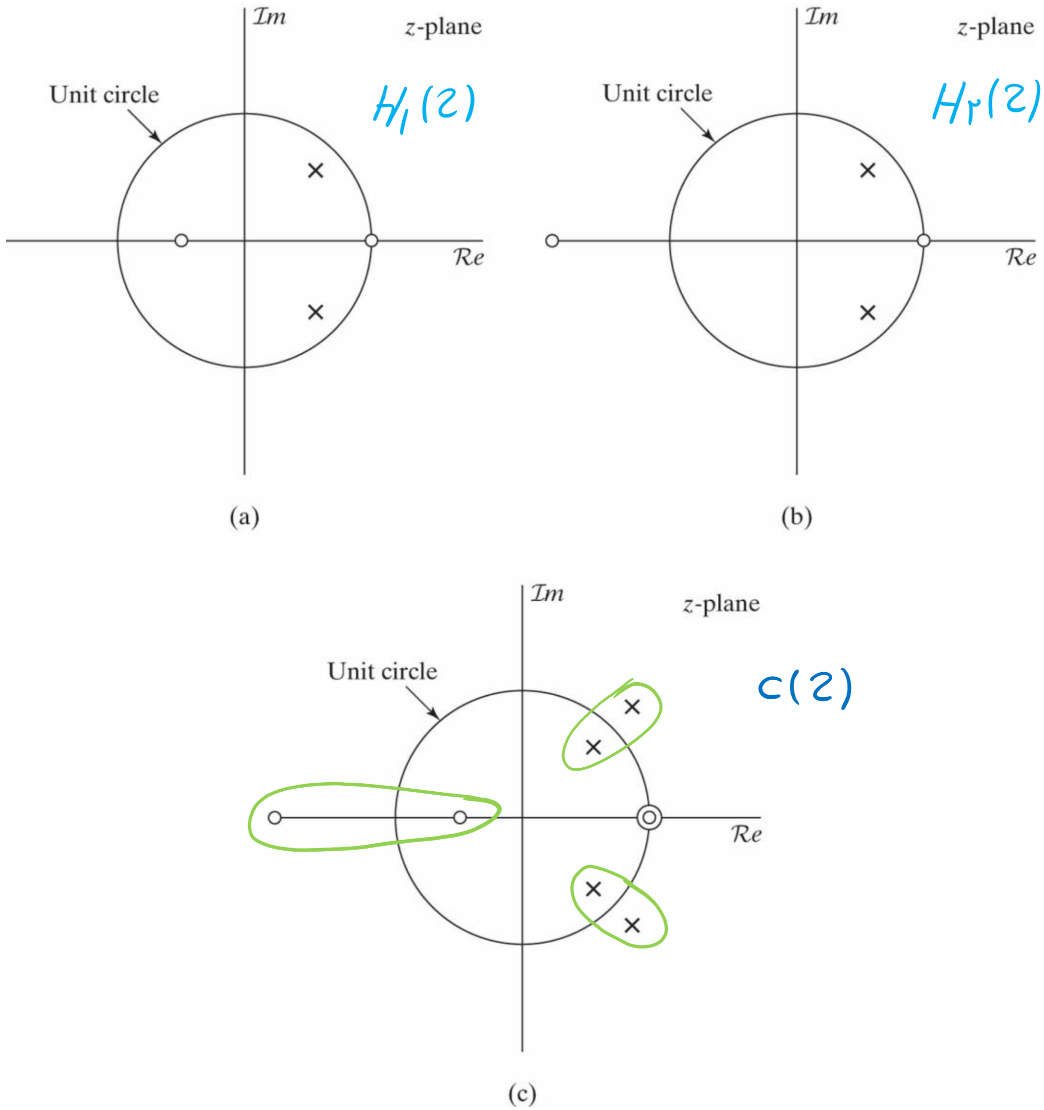
و به صفر و قطب های $H(z)$ می‌رسیم.

$$H(z)H^*\left(\frac{1}{z^*}\right)\Big|_{z=e^{j\omega}} = H(e^{j\omega})H^*(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})|^2$$



نتیجه: برای یک $C(z)$، دو $H(z)$ متناظر داریم.

Figure 5.16 Pole–zero plots for two system functions and their common magnitude-squared function. (a) $H_1(z)$. (b) $H_2(z)$. (c) $C_1(z)$. $C_2(z)$.



$|H(e^{j\omega})| \longrightarrow C(z)$

Figure 5.17 Pole–zero plot for the magnitude-squared function in Example 5.10.

مثال:

چندجواب مختلف برای $H(z)$ ؟

۲×۲×۲×۲×۲×۲

$=$ ۲^۶ $=$ ۶۴ حالت مختلف $H(z)$

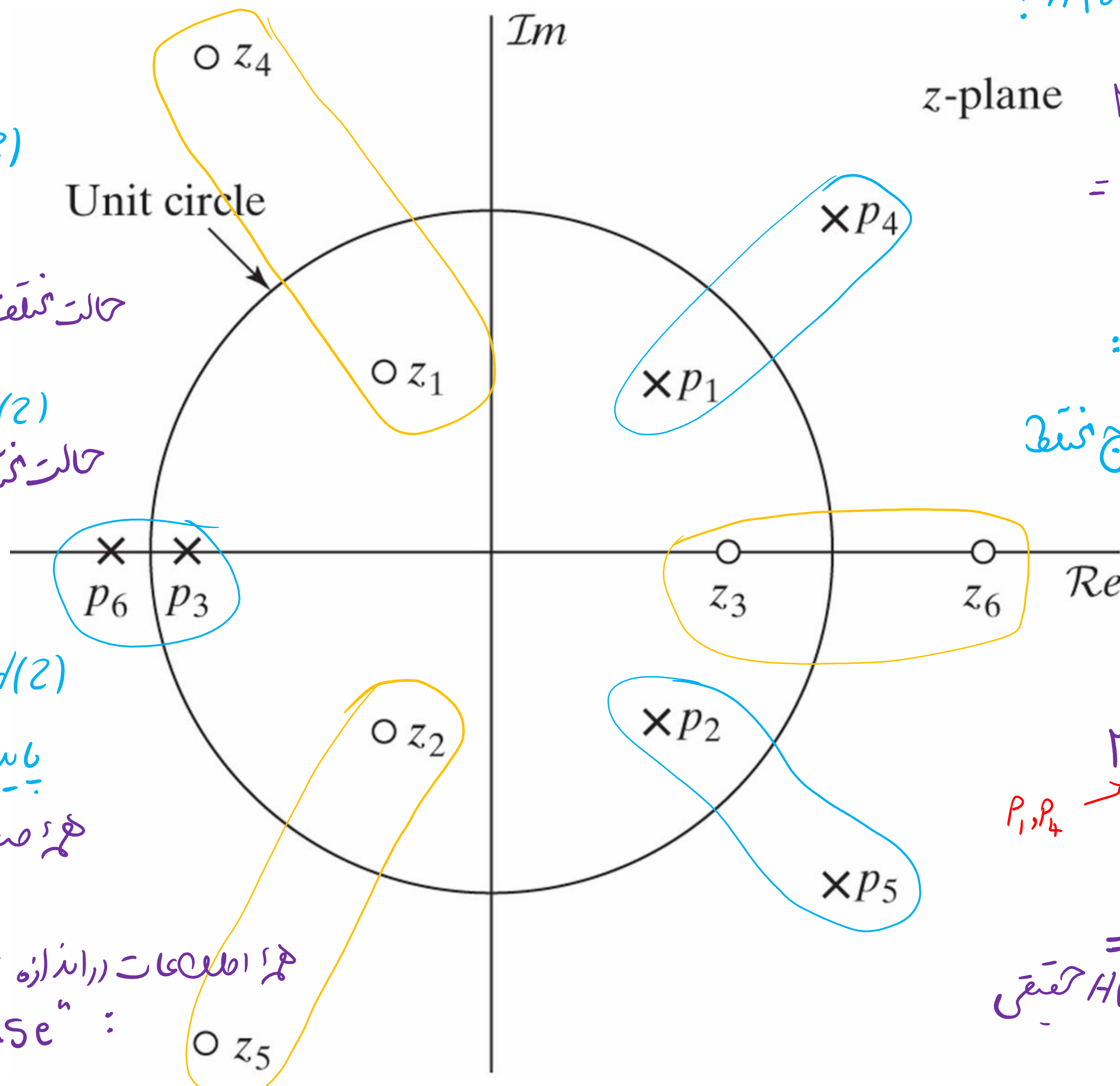
$H(z)$ علی و پایدار:

P_3, P_2, P_1

صفرها ۲×۲×۲ = ۲^۳ = ۸ حالت مختلف

$H(z)$ حقیقی و علی و پایدار:

۲×۲ = ۲^۲ = ۴ حالت مختلف



$H(z)$ با ضرایب حقیقی:

↓

صفر و قطب های مزدوج مختلط

اگر P_1 انتخاب شود باید مزدوج مختلط آن P_2 نیز انتخاب شود.

$\underbrace{۲ \times \cancel{۲}}_{P_1, P_4} \times \underbrace{۲}_{P_3, P_6} \times \underbrace{۲}_{z_1, z_4} \times \cancel{۲} \times \underbrace{۲}_{z_3, z_6}$

$=$ ۲^۴ $=$ ۱۶

حالت مختلف برای $H(z)$ حقیقی

$H(z)$ و وارون آن هر دو علی و پایدار باشند:

همه صفر و قطبها داخل دایره واحد

یکتا: حالت ۱ = همه اطلاعات در اندازه

"minimum phase" :

5.5 سیستم های تمام گذر: All-Pass

$z = a$ قطب

$= \frac{1}{a^*}$ صفر

پاسخ فرکانس:

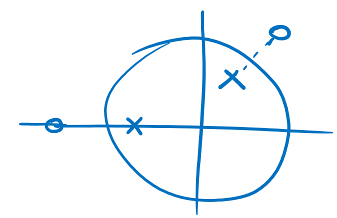
$$H_{ap}(z) = \frac{z^{-1} - a^*}{1 - a z^{-1}}$$

$$H_{ap}(e^{j\omega}) = \frac{e^{-j\omega} - a^*}{1 - a e^{-j\omega}}$$

$$= e^{-j\omega} \frac{1 - a^* e^{j\omega}}{1 - a e^{-j\omega}}$$

conjugate reciprocal صفر و قطب

مزدوج نقطه معکوس



$$|e^{-j\omega}| = 1$$

$$\underbrace{|1 - a^* e^{j\omega}| = |1 - a e^{-j\omega}|}_{\text{مزدوج}*} \longrightarrow |H_{ap}(e^{j\omega})| = 1$$

سیستمی که پاسخ فرکانسی آن برای تمام فرکانس ها ثابت باشد سیستم تمام گذر

نامیده می شود.

Figure 5.18 Typical pole–zero plot for an all-pass system.

conjugate reciprocal : هر جفت صفر و قطب

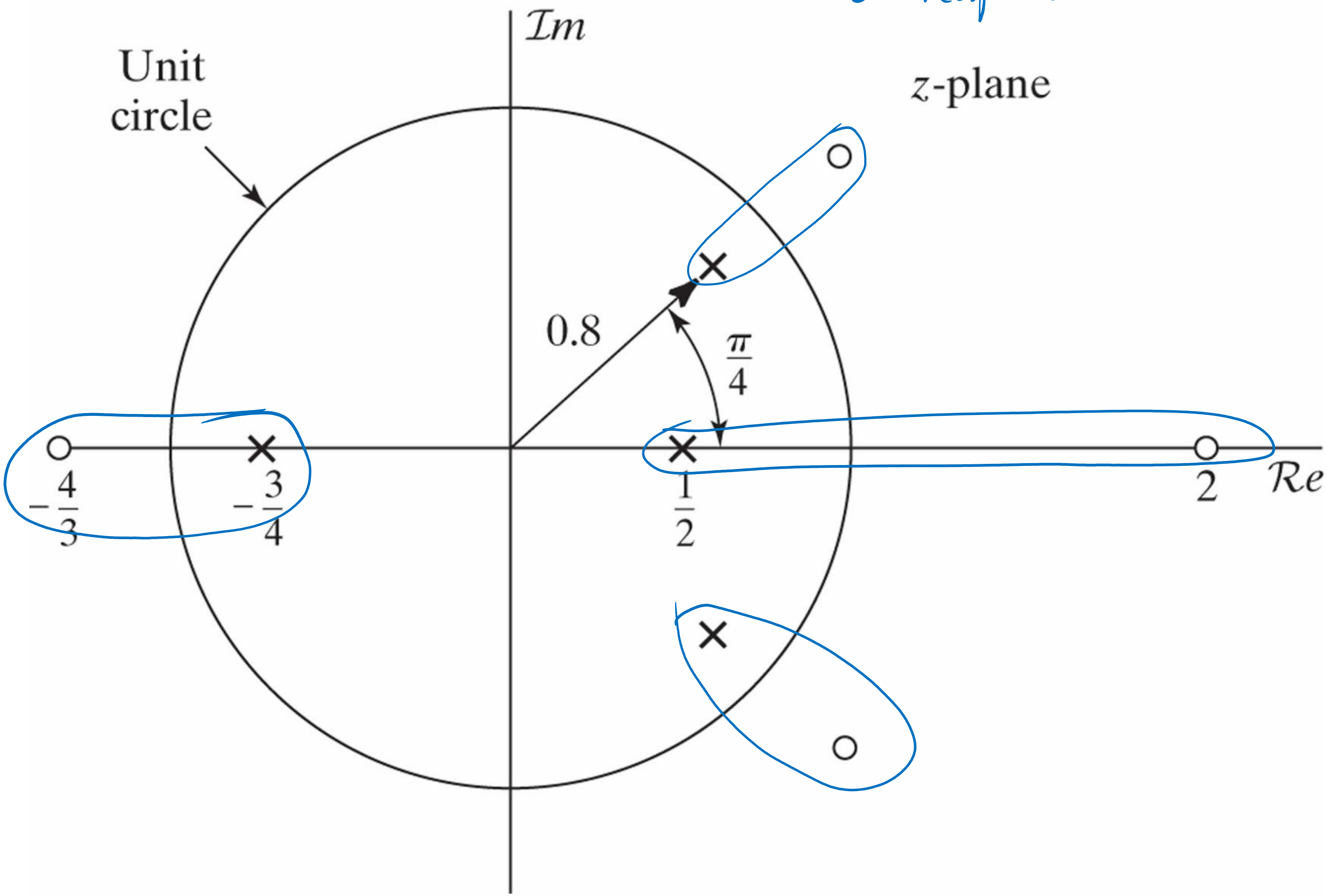
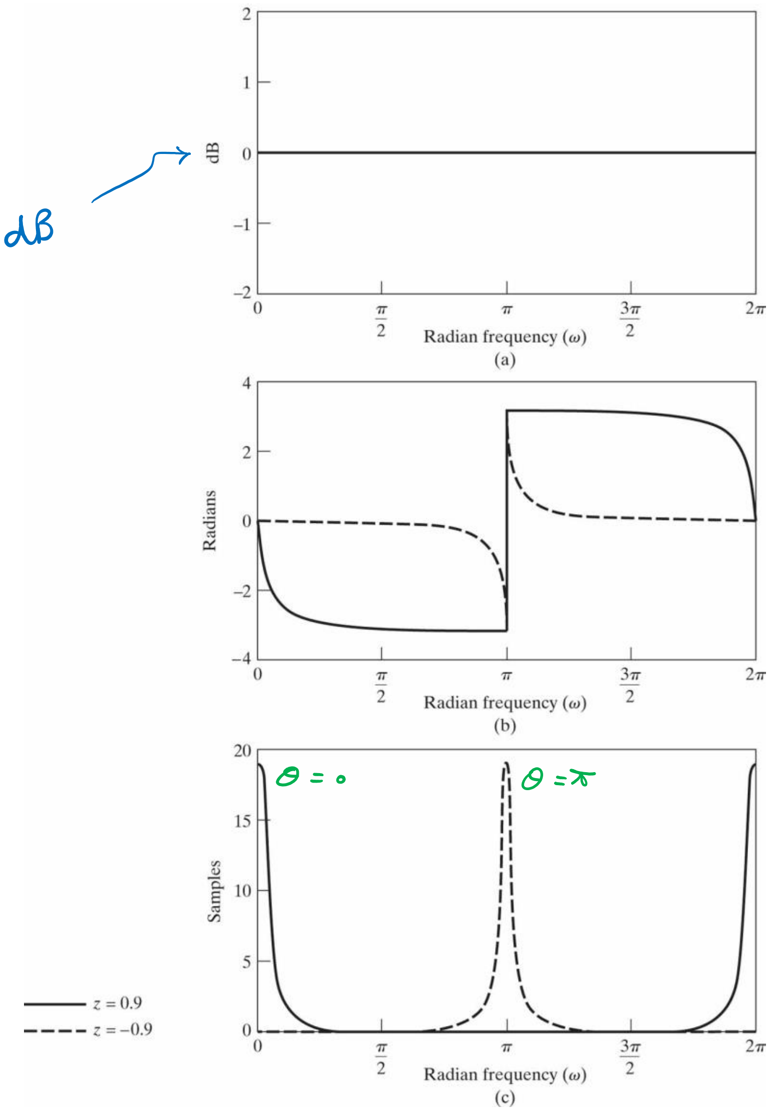


Figure 5.19 Frequency response for all-pass filters with real poles at $z = 0.9$ (solid line) and $z = -0.9$ (dashed line). (a) Log magnitude. (b) Phase (principal value). (c) Group delay.

سیستم تمام گذر مرتبه اول

$|H(e^{j\omega})| = 1$

$0\ dB$



قطب:

$r = 0.9$

$\theta = 0$

$z = 0.9$: خط پیوسته

$z = -0.9$: خط چین

$r = 0.9$

$\theta = \pi$

Figure 5.20 Frequency response of 2nd-order all-pass system with poles at $z = 0.9e^{\pm j\pi/4}$. (a) Log magnitude. (b) Phase (principal value). (c) Group delay.

سیستم تمام گذر مرتبه ۲ :

$|H(e^{j\omega})| = 1 \rightarrow$

$0\,dB$

$z = 0.9\, e^{\pm j\frac{\pi}{4}}$

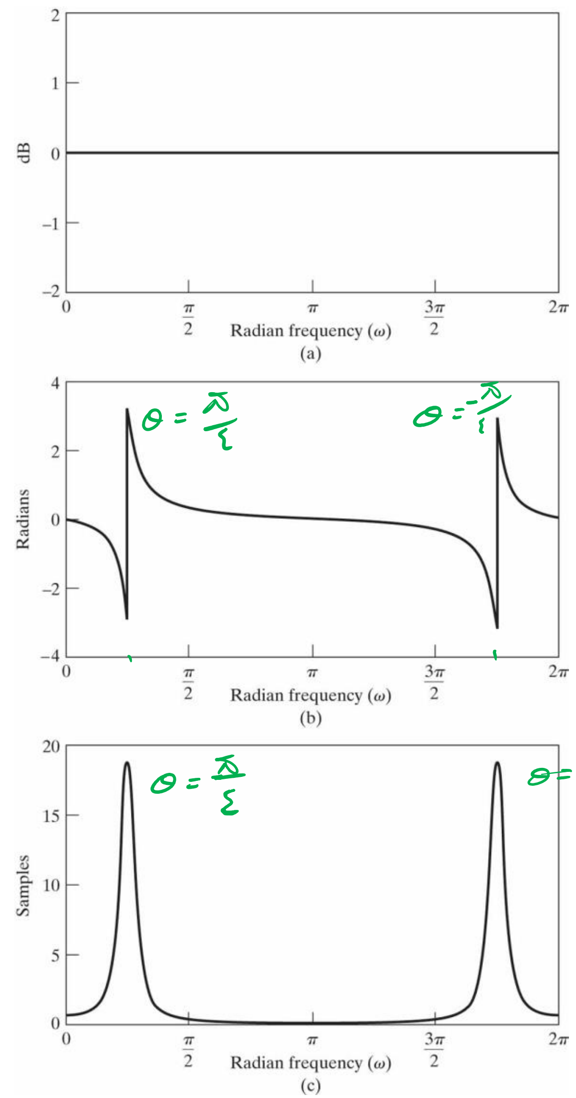
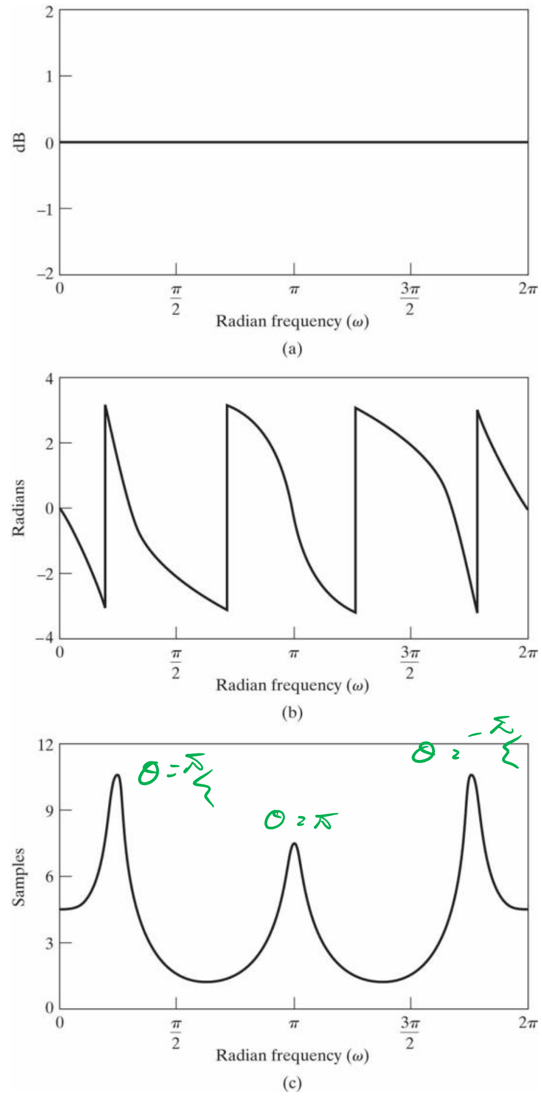


Figure 5.21 Frequency response for an all-pass system with the pole–zero plot in Figure 5.18. (a) Log magnitude. (b) Phase (principal value). (c) Group delay.

Fig 5.18



5.6: سیستم‌های کمینه فاز : Minimum Phase Systems

به سیستم‌هایی که هم خود، هم وارونشان علی و پایدار باشند کمینه فاز گفته می‌شود.

برای سیستم کمینه فاز، همهٔ صفر و قطبهای سیستم داخل دایرهٔ واحد هستند.

قضیه: هر $H(z)$ کسری بدون صفر و قطب روی دایرهٔ واحد را می‌توان به صورت زیر تجزیه کرد و نمایش داد.

$$H(z) = H_{min}(z)\, H_{ap}(z)$$

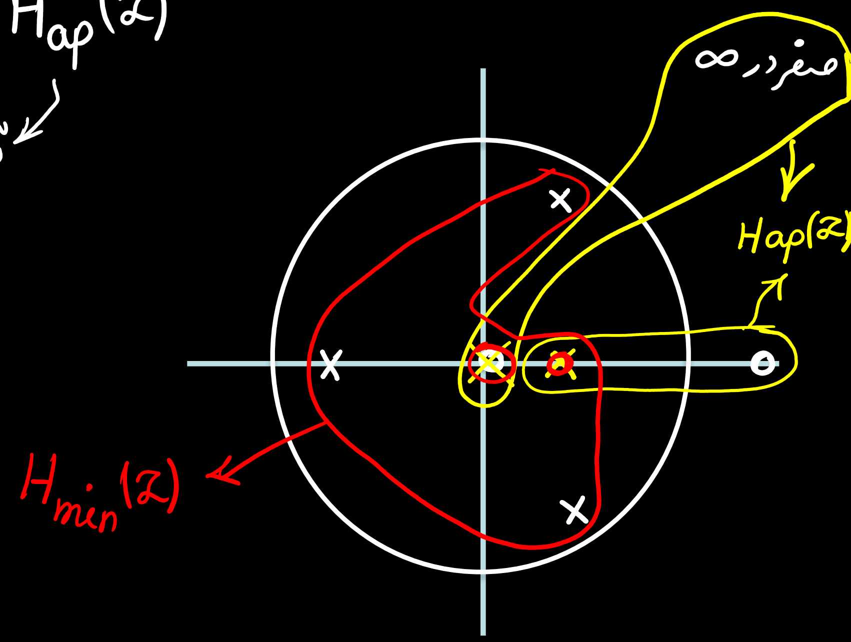
کمینه فاز

صفر و قطبها داخل دایرهٔ واحد

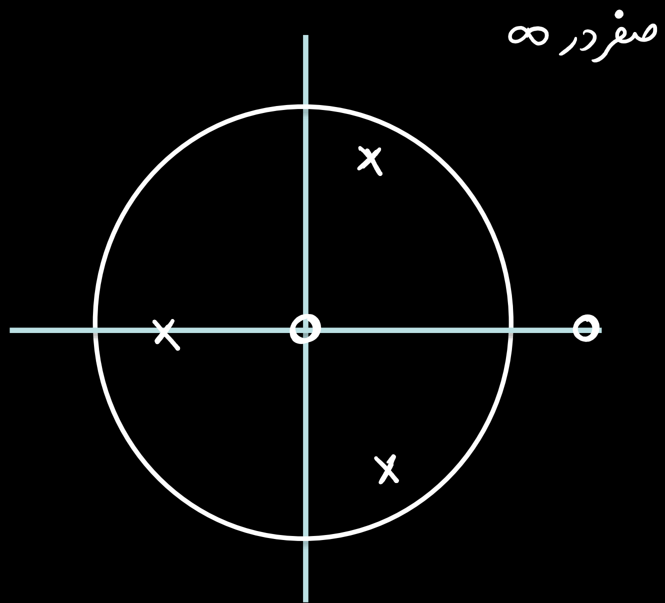
تمام‌گذر

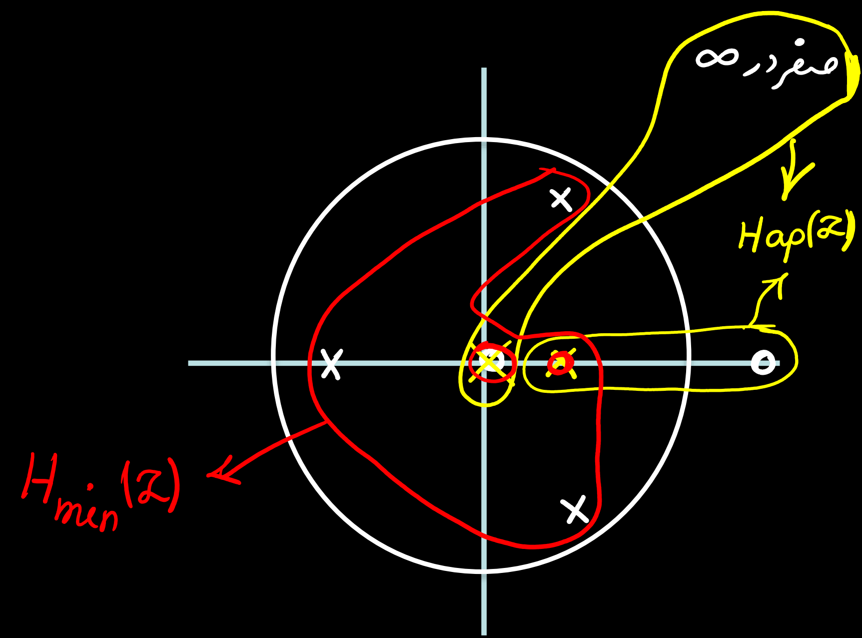
هر جفت صفر و قطب : مزدوج معکوس

conjugate reciprocal



$H(z)$:



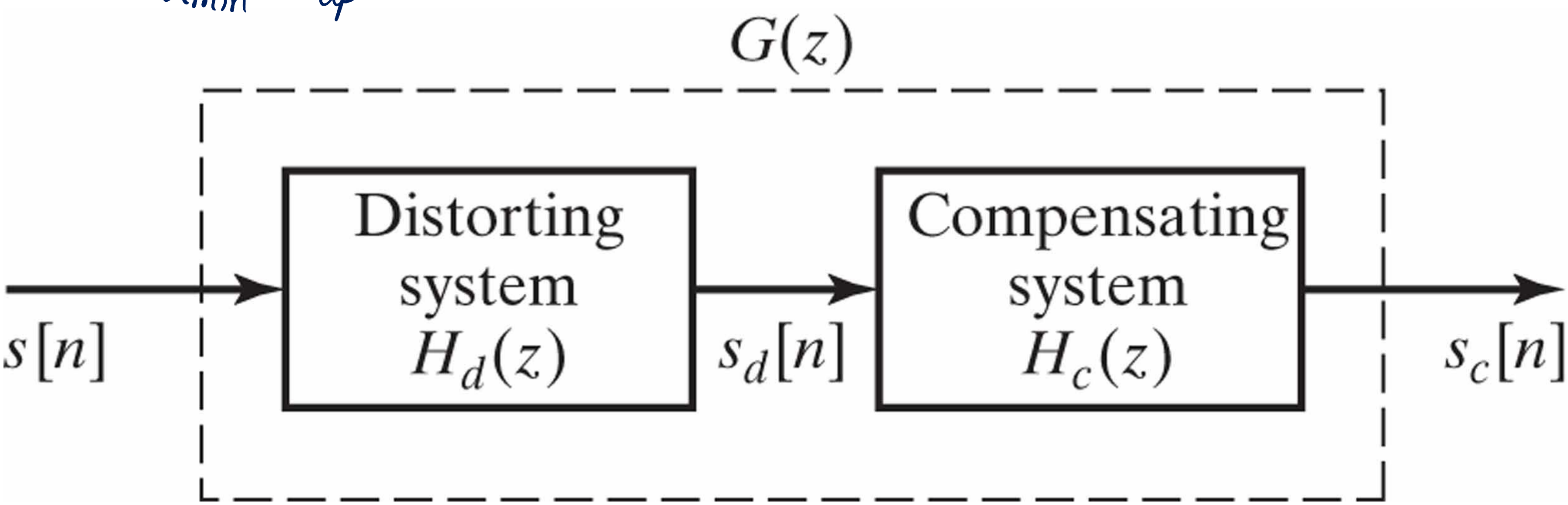


6.2 : جبران پاسخ فرکانسی سیستم‌های غیر کمینه فاز :

Figure 5.22 Illustration of distortion compensation by linear filtering.

برای جبران سازی کامل ، $H_c(z)$ باید معکوس $H_d(z)$ باشد اگر شرط علی و پایدار بودن برای هر دو سیستم در نظر گرفته شود. تنها در حالتی این جبران سازی امکان پذیر است که سیستم $H_d(z)$ کمینه فاز باشد.

$$H_d(z) = H_{d_{min}}(z)\, H_{ap}(z)$$



$$H_c(z) = \frac{1}{H_{d_{min}}(z)}$$

$$G(z) = H_d(z) H_c(z) = H_{ap}(z)$$

مثال: جبران سازی سیستم FIR:

$$H_d(z) = (1-0.9e^{j0.6\pi}z^{-1})(1-0.9e^{-j0.6\pi}z^{-1}) \times (1-1.25e^{j0.8\pi}z^{-1})(1-1.25e^{-j0.8\pi}z^{-1})$$

$$= (1-0.9e^{j0.6\pi}z^{-1})(1-0.9e^{-j0.6\pi}z^{-1})(1.25)^2 \times (z^{-1}-0.8e^{-j0.8\pi})(z^{-1}-0.8e^{j0.8\pi})$$

$$H_{min}(z) = (1.25)^2(1-0.9e^{j0.6\pi}z^{-1})(1-0.9e^{-j0.6\pi}z^{-1}) \times (1-0.8e^{-j0.8\pi}z^{-1})(1-0.8e^{j0.8\pi}z^{-1})$$

$$H_{ap}(z) = \frac{(z^{-1}-0.8e^{-j0.8\pi})(z^{-1}-0.8e^{j0.8\pi})}{(1-0.8e^{-j0.8\pi}z^{-1})(1-0.8e^{j0.8\pi}z^{-1})}$$

Figure 5.23 Pole–zero plot of FIR system in Example 5.13.

پایدار ؟
علی ؟
سیستم علی و پایدار
ولی کمینه فاز نیست

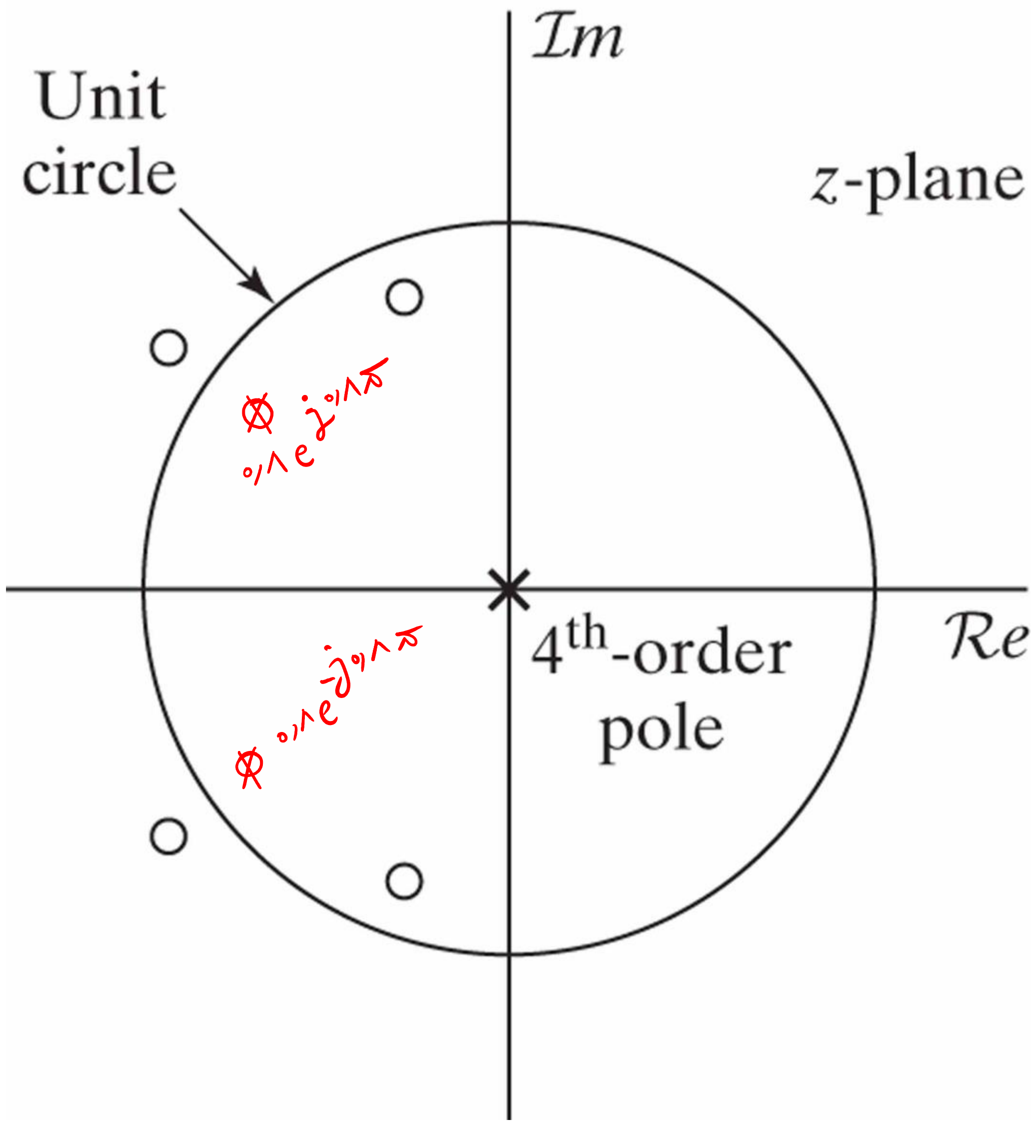


Figure 5.24 Frequency response for FIR system with pole–zero plot in Figure 5.23. (a) Log magnitude. (b) Phase (principal value). (c) Group delay.

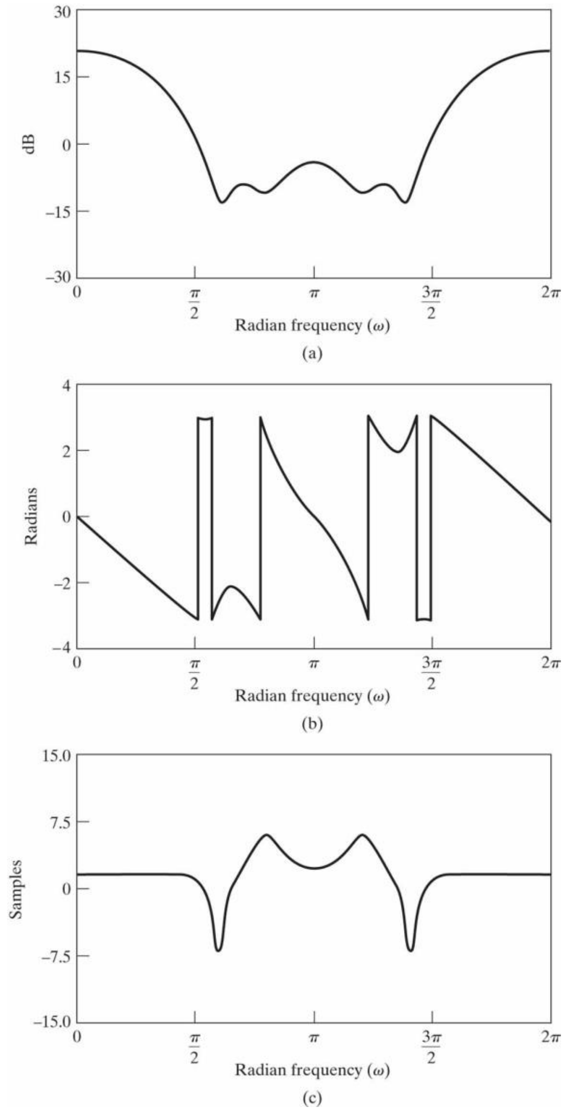


Figure 5.25 Frequency response for minimum-phase system in Example 5.13. (a) Log magnitude. (b) Phase. (c) Group delay.

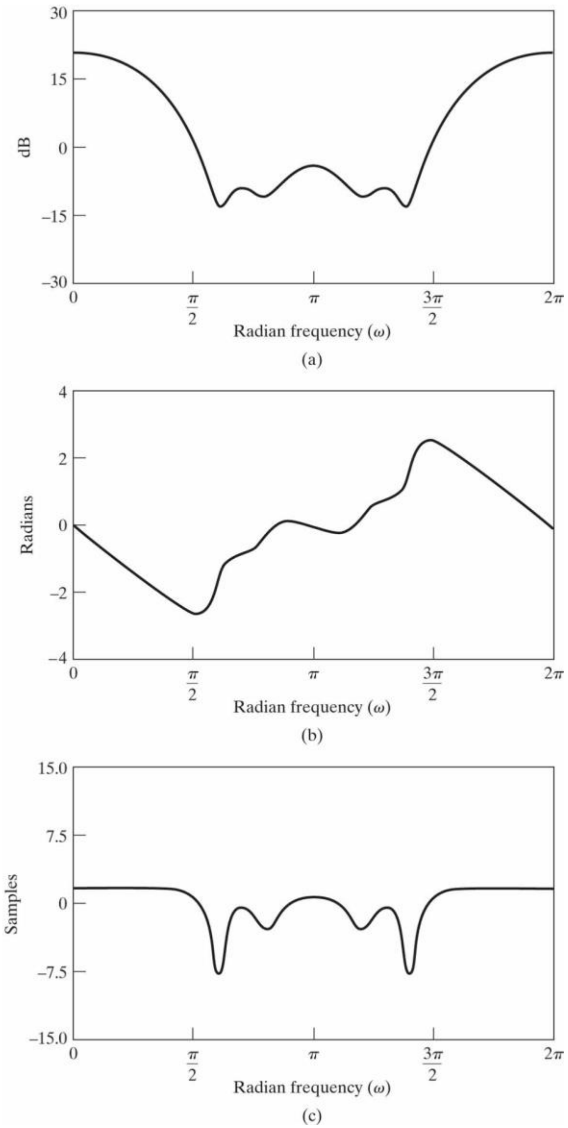
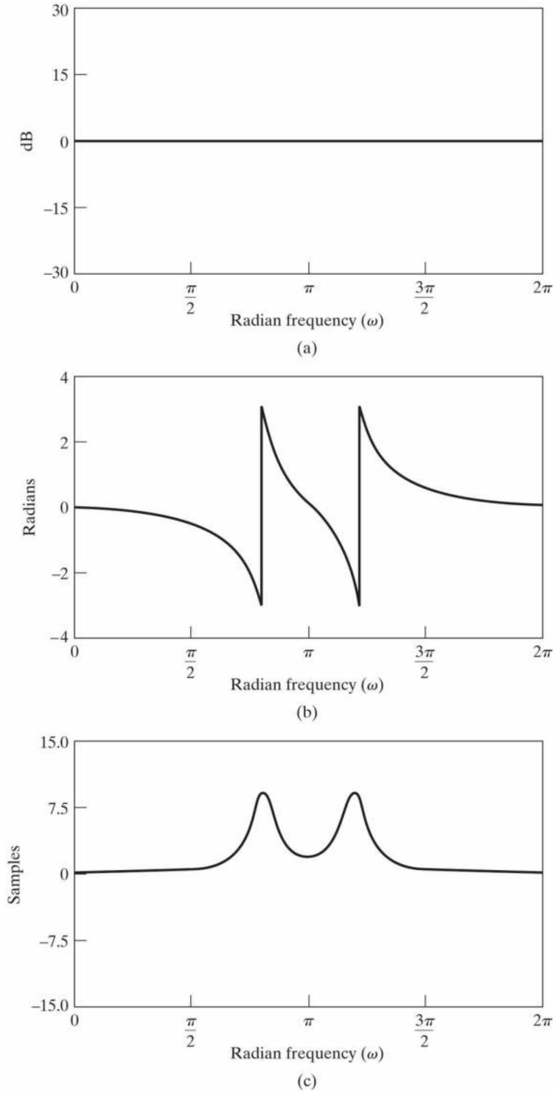


Figure 5.26 Frequency response of all-pass system of Example 5.13. (The sum of corresponding curves in Figures 5.25 and 5.26 equals the corresponding curve in Figure 5.24 with the sum of the phase curves taken modulo 2π.) (a) Log magnitude. (b) Phase (principal value). (c) Group delay.

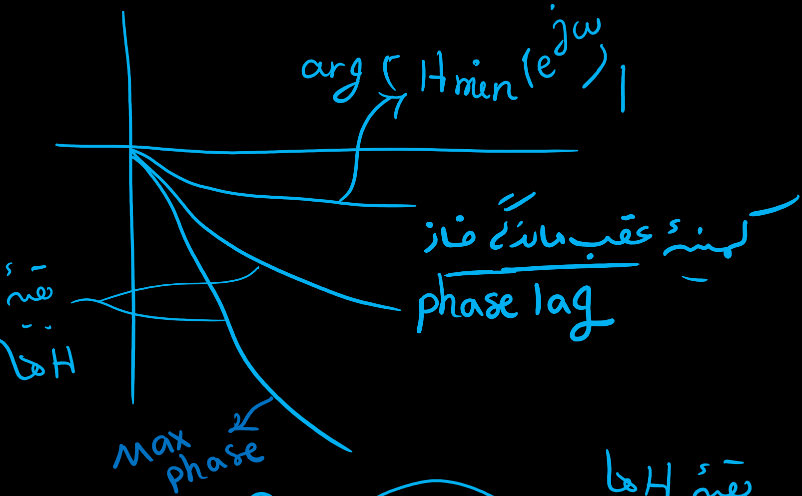


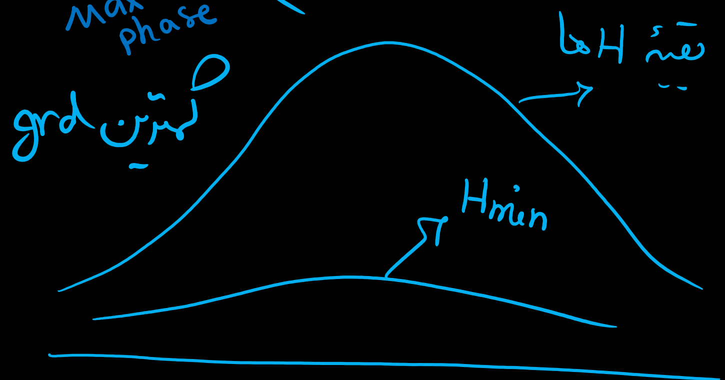
قضیه: در بین تمام سیستم‌های LTI علّی پایدار حقیقی و با $H(z)$ کسری و بدون صفر و قطب روی واحد و با $|H(e^{j\omega})|$ برابر، $H_{min}(z)$ دارای ویژگی‌های زیر است:

۱. $\arg\{H(e^{j\omega})\} \leq \arg\{H_{min}(e^{j\omega})\}$

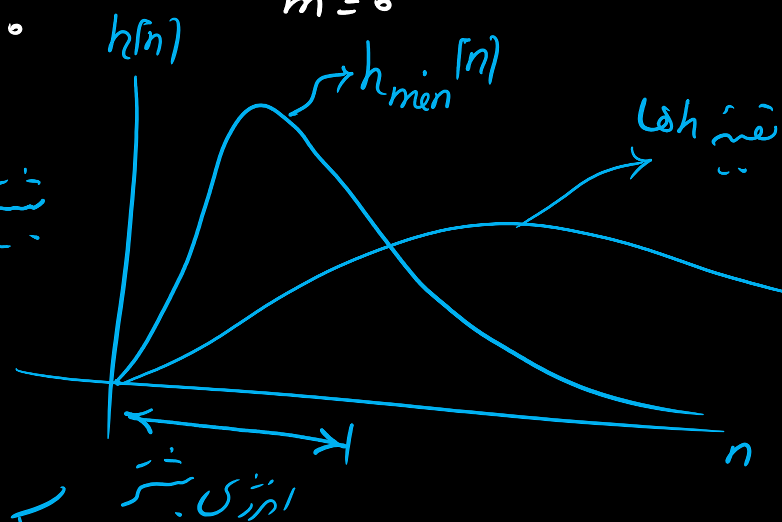
۲. $grd\{H(e^{j\omega})\} \geq grd\{H_{min}(e^{j\omega})\}$

۳. $\sum_{m=0}^{n} |h[m]|^2 \leq \sum_{m=0}^{n} |h_{min}[m]|^2$





بیشترین سرعت پاسخ



H_{min} مولفه‌های فرکانسی با کمترین تأخیر از سیستم عبور می‌کنند.

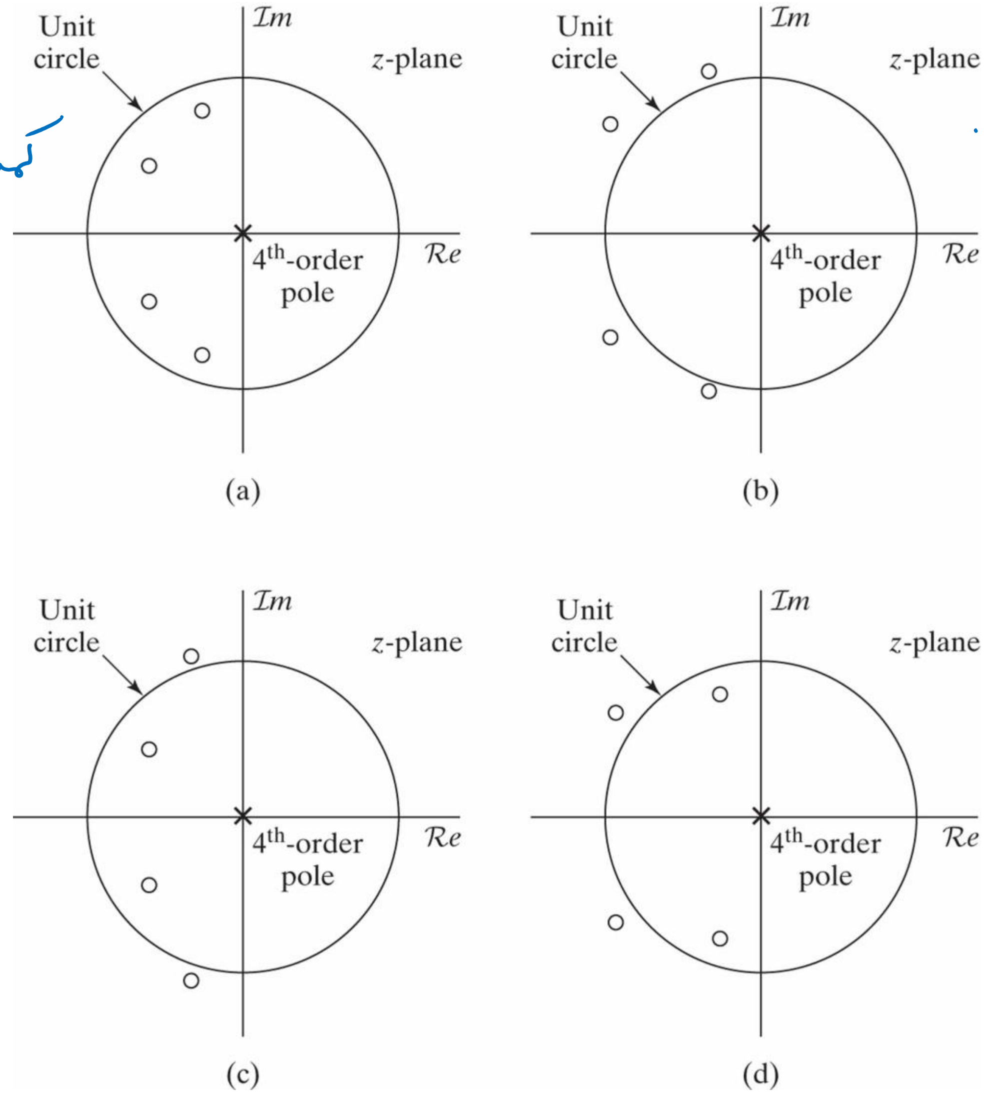
کمینه فاز $\begin{cases} \text{کمترین تأخیر} \\ \text{بیشترین سرعت} \end{cases}$

چهار سیستم با $|H(e^{j\omega})|$ برابر

Figure 5.27 Four systems, all having the same frequency-response magnitude. Zeros are at all combinations of the complex conjugate zero pairs $0.9e^{\pm j0.6\pi}$ and $0.8e^{\pm j0.8\pi}$ and their reciprocals.

کمینه فاز: همه صفر و قطبها داخل دایره واحد

بیشینه فاز
maximum phase
همه صفرها خارج از دایره واحد



پاسخ ضربهٔ چهار سیستم اسلاید 5.27 :

Figure 5.28 Sequences corresponding to the pole–zero plots of Figure 5.27.

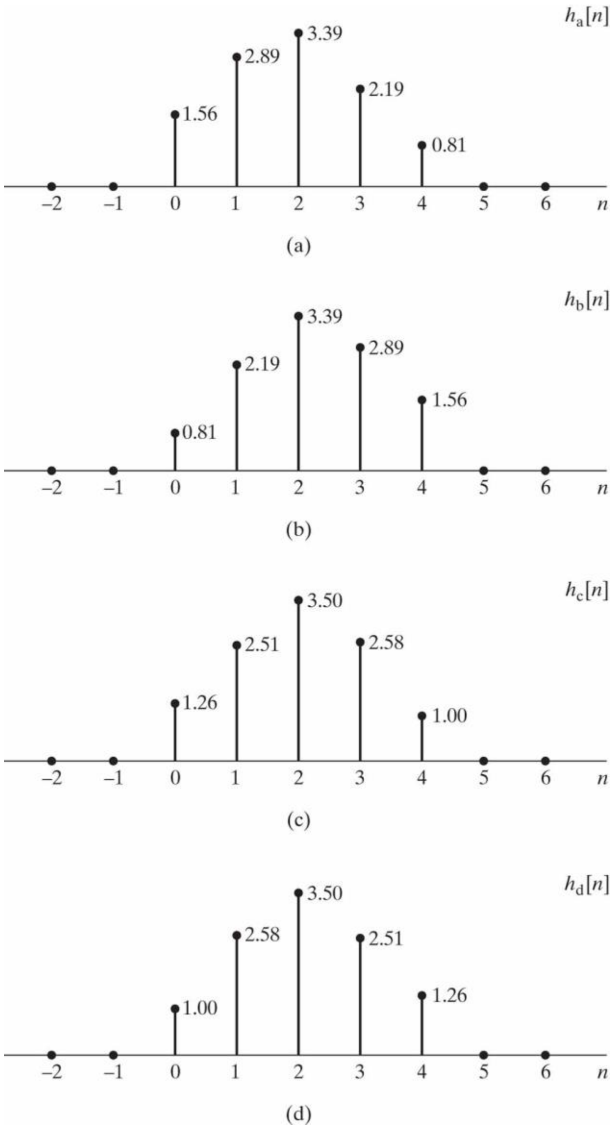
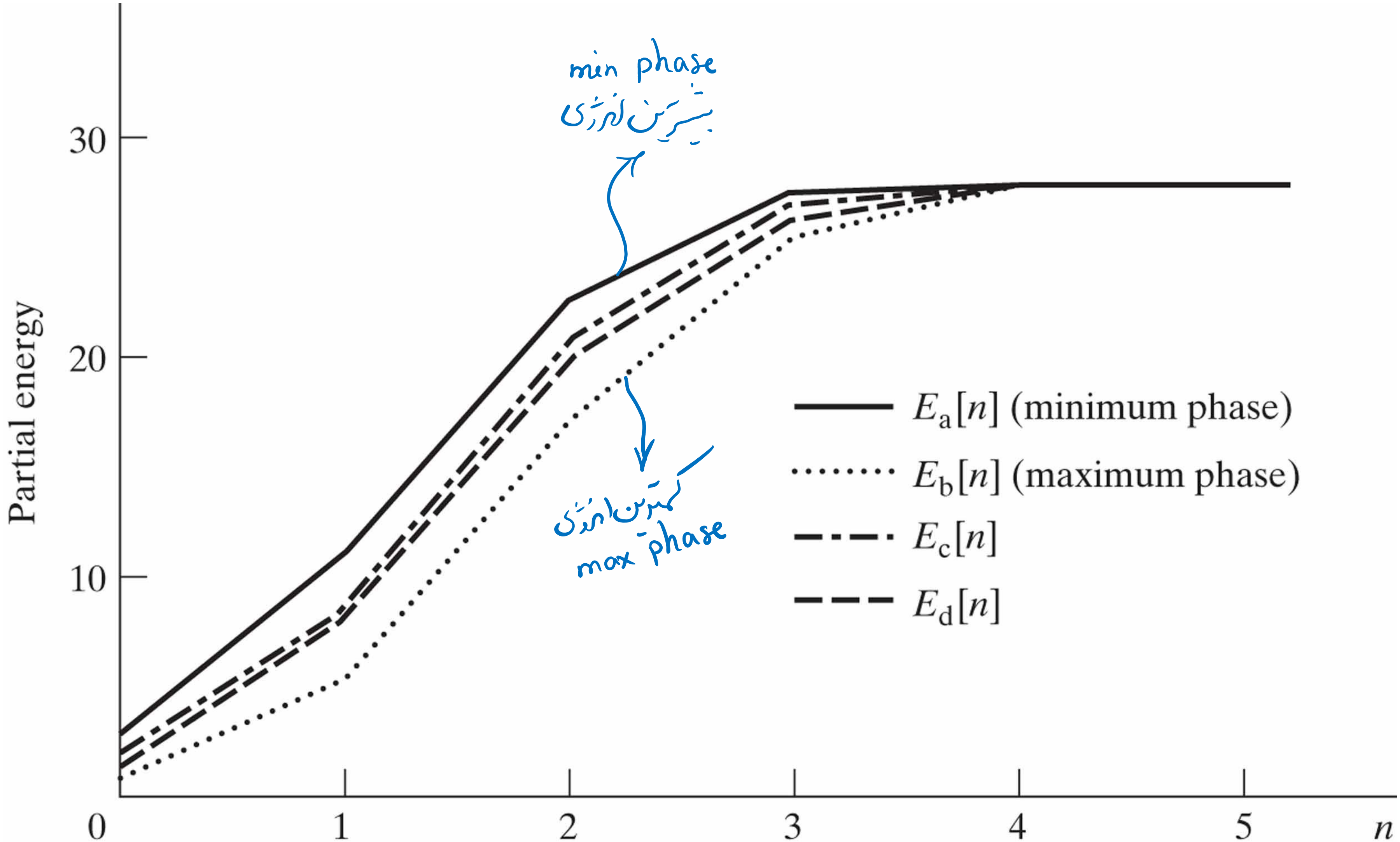


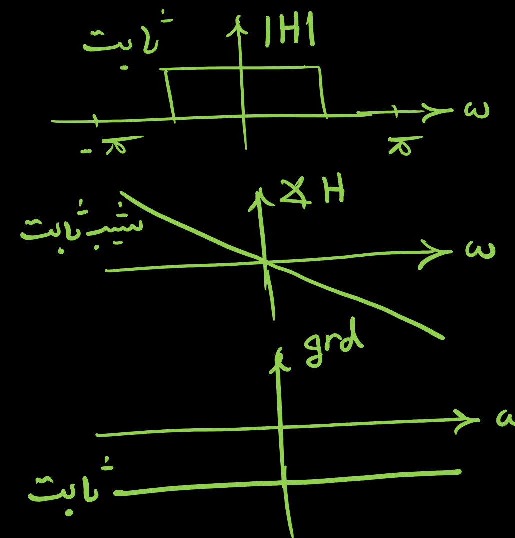
Figure 5.29 Partial energies for the four sequences of Figure 5.28. (Note that $E_a[n]$ is for the minimum-phase sequence $h_a[n]$ and $E_b[n]$ is for the maximum-phase sequence $h_b[n]$.)



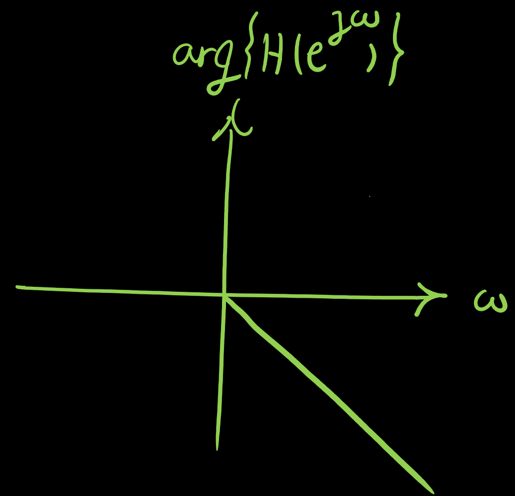
5.7 : سیستم‌های خطی با فاز خطی تعمیم یافته :

Generalized Linear Phase

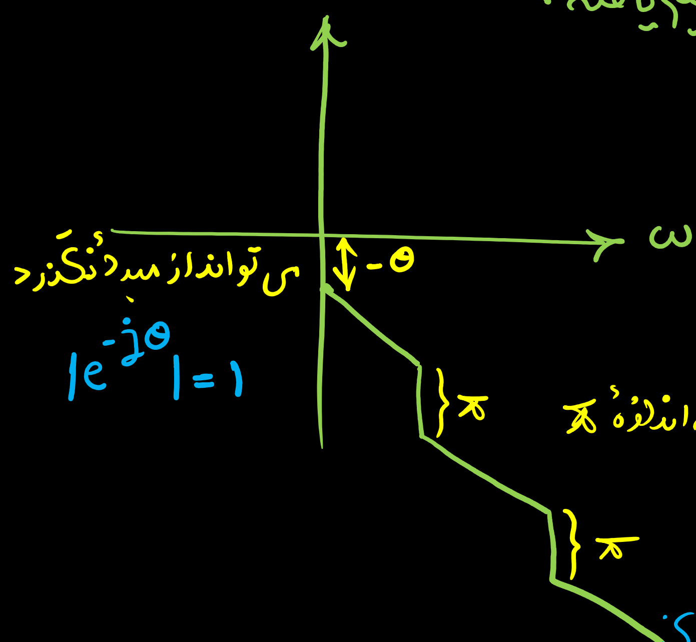
یادآوری : سیستم ایده‌آل :



فاز خطی :



فاز خطی تعمیم یافته :

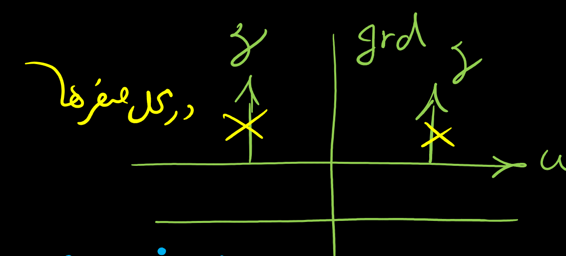


می‌تواند از مبدأ نگذرد

$|e^{-j\theta}|=1$

پرش‌های به اندازهٔ π

صفر روی دایرهٔ واحد → فاز خطی $\frac{\omega}{2}$



در فرکانس خودش یک پرش π داریم $= |H|$ است و فرکانس عبور می‌کند.

قضیه: اگر $h[n] = e^{j\beta} h^*[\alpha - n]$ باشد، آنگاه سیستم دارای فاز خطی تعمیم یافته است.

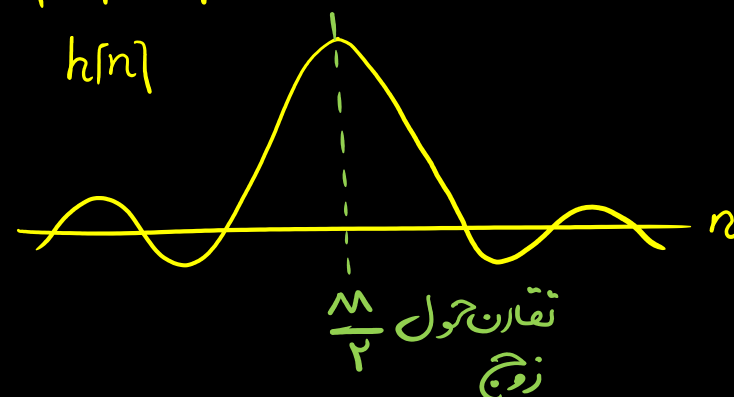
$\alpha, \beta \in R$

حالت تقارن در پاسخ ضربه: چهار حالت مختلف

مثال: $\beta = 0$ $\quad h[n]$ حقیقی

$\alpha = M$ ثابت زوج مثبت

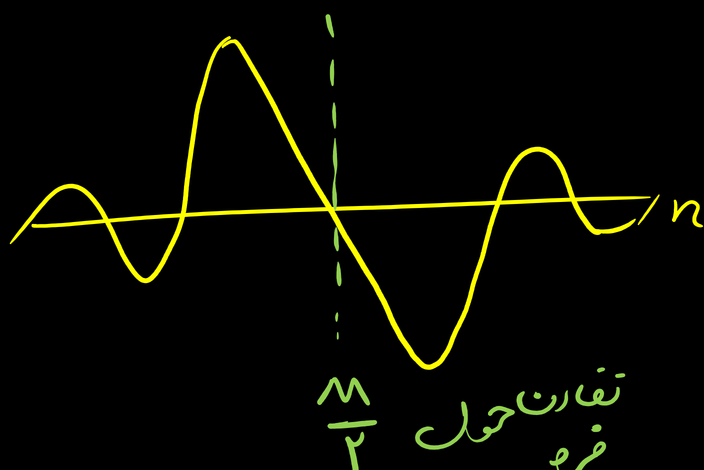
$$h[n] = h[M-n]$$



$\beta = \pi$ $\quad h[n]$ حقیقی

$\alpha = M$ ثابت زوج مثبت

$$h[n] = -h[M-n]$$



فاز ایده‌آل: $h[n]$ متقارن

نتیجه: در یک سیستم علی و حقیقی اگر

$$h[n] = h[M-n]$$
$$h[n] = -h[M-n]$$

باشد، آنگاه سیستم دارای ویژگیهای زیر است:

۱ـ فاز خطی تعمیم یافته (ایده‌آل)

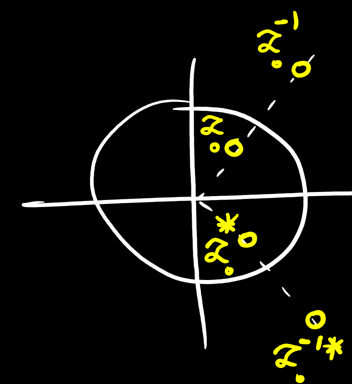
۲ـ FIR (با طول محدود): علی + تقارن

۳ـ پایدار: چون FIR

بهترین محل قطب

۴ـ همه قطبهای $H(z)$ در مبدأ: FIR همه قطبها در مبدأ یا ~~∞~~ زیرا علی است

۵ـ صفرهای $H(z)$ متقارن در $z_0,\ z_0^*,\ z_0^{-1},\ z_0^{-1*}$



اثبات: $h[n] = \pm h[M-n]$ حقیقی

$$H(z) = \pm z^{-M} H(z^{-1})$$

$$H(z) = H^*(z^*)$$

$$\begin{cases} H(z_0) = 0 \\ H(z_0^{-1}) = 0 \\ H(z_0^*) = 0 \\ H(z_0^{-1*}) = 0 \end{cases}$$

چهار نوع مختلف سیستم های علی و حقیقی با فاز خطی تعمیم یافته :

$$\begin{cases} \text{Type I}: & h[n]=h[M-n] \\ \text{Type II}: & h[n]=h[M-n] \\ \text{Type III}: & h[n]=-h[M-n] \\ \text{Type IV}: & h[n]=-h[M-n] \end{cases}$$

- Type I: $h[n]=h[M-n]$ تقارن زوج و M زوج
- Type II: $h[n]=h[M-n]$ تقارن زوج و M فرد
- Type III: $h[n]=-h[M-n]$ تقارن فرد و M زوج
- Type IV: $h[n]=-h[M-n]$ تقارن فرد و M فرد

Figure 5.30 Interpretation of noninteger delay in discrete-time systems.

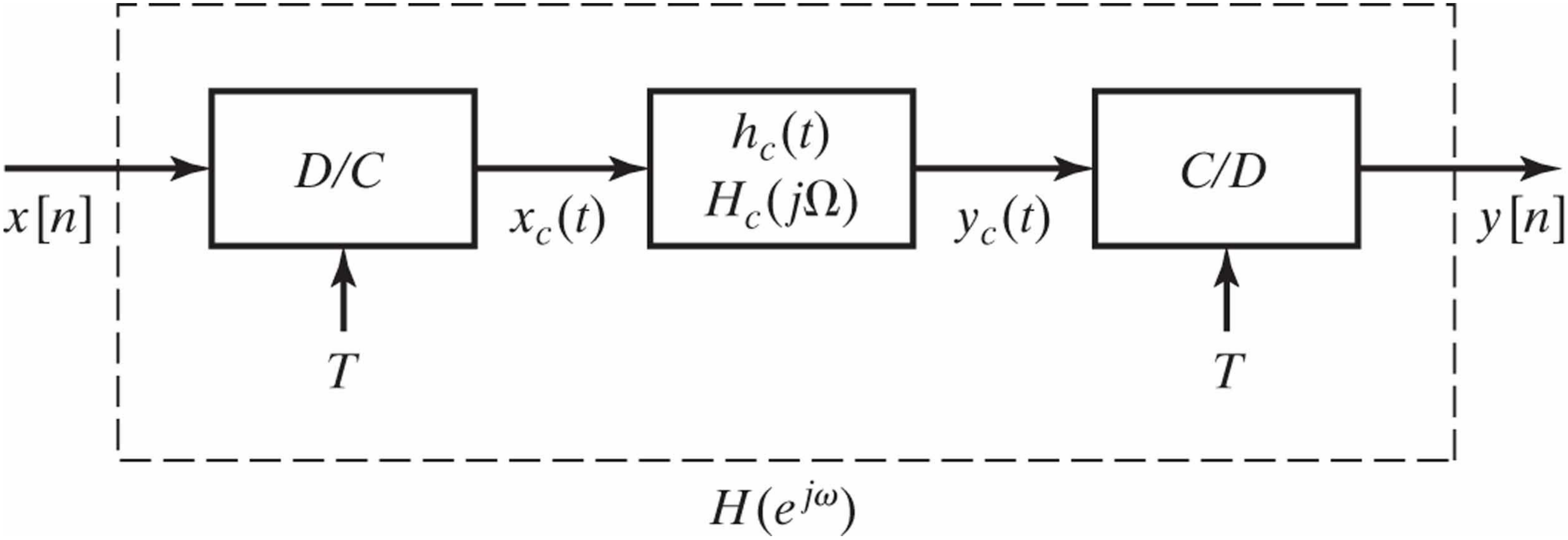


Figure 5.31 Representation of a linear-phase LTI system as a cascade of a magnitude filter and a time shift.

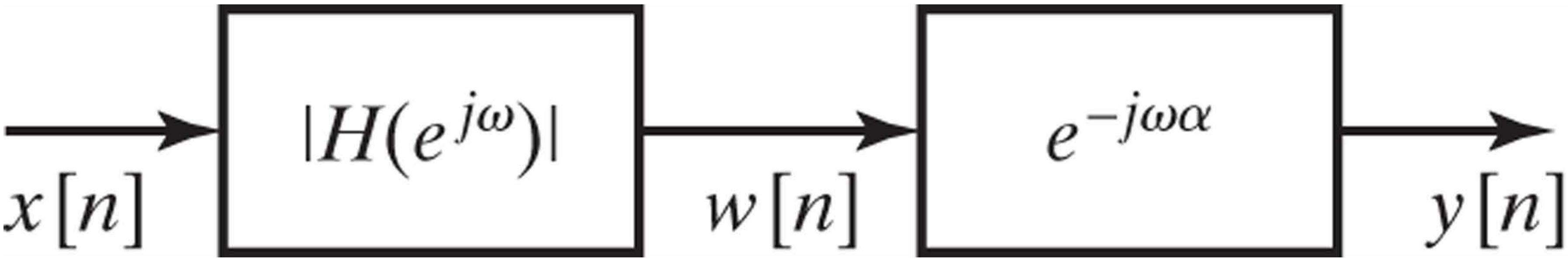


Figure 5.32 Ideal lowpass filter impulse responses, with $\omega c = 0.4\pi$. (a) Delay = α = 5. (b) Delay = α = 4.5. (c) Delay = α = 4.3.

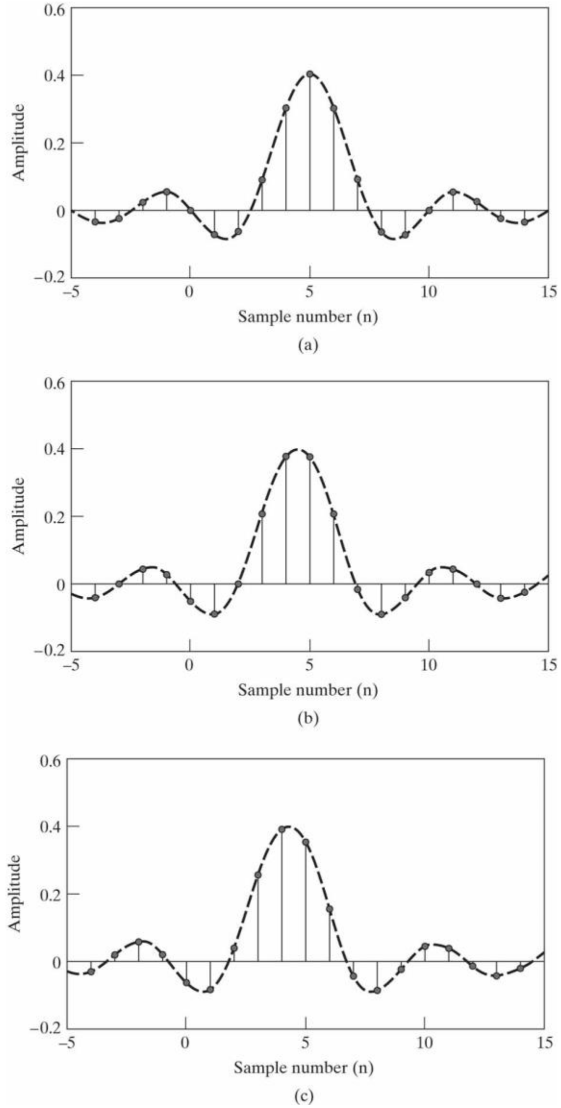


Figure 5.33 Examples of FIR linear-phase systems. (a) Type I, M even, $h[n] = h[M - n]$. (b) Type II, M odd, $h[n] = h[M - n]$. (c) Type III, M even, $h[n] = -h[M - n]$. (d) Type IV, M odd, $h[n] = -h[M - n]$.

انواع مختلف :

Type I
M زوج و تقارن زوج

Type II
M فرد و تقارن زوج

Type III
M زوج و تقارن فرد

Type IV
M فرد و تقارن فرد

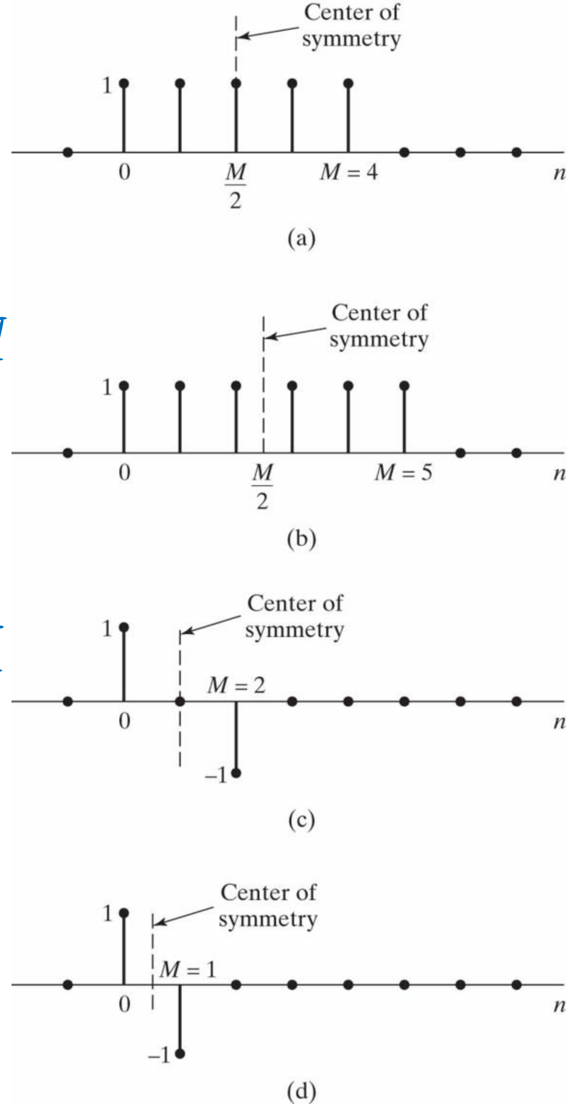


Figure 5.34 Frequency response of type I system of Example 5.15. (a) Magnitude. (b) Phase. (c) Group delay.

پاسخ فرکانس (Type I)

اندازه

فاز ناپیوسته

grd

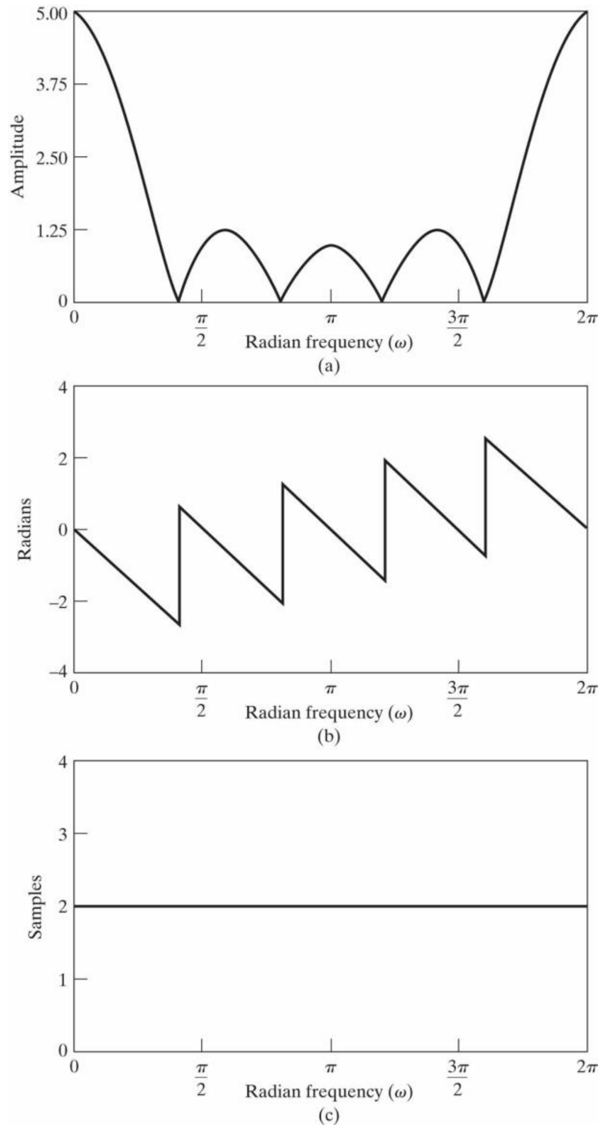
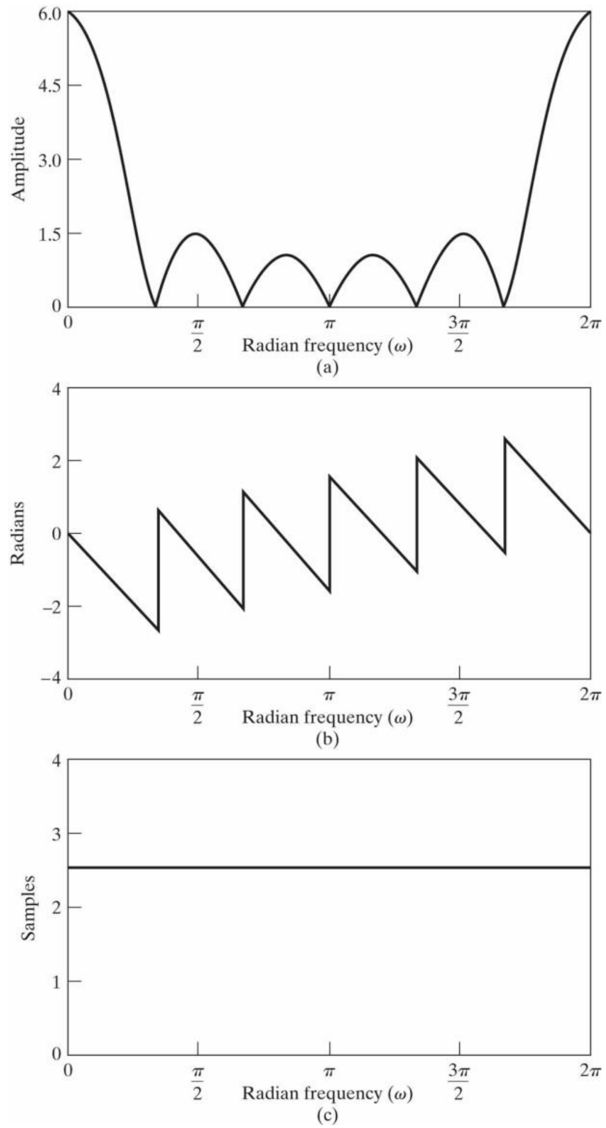
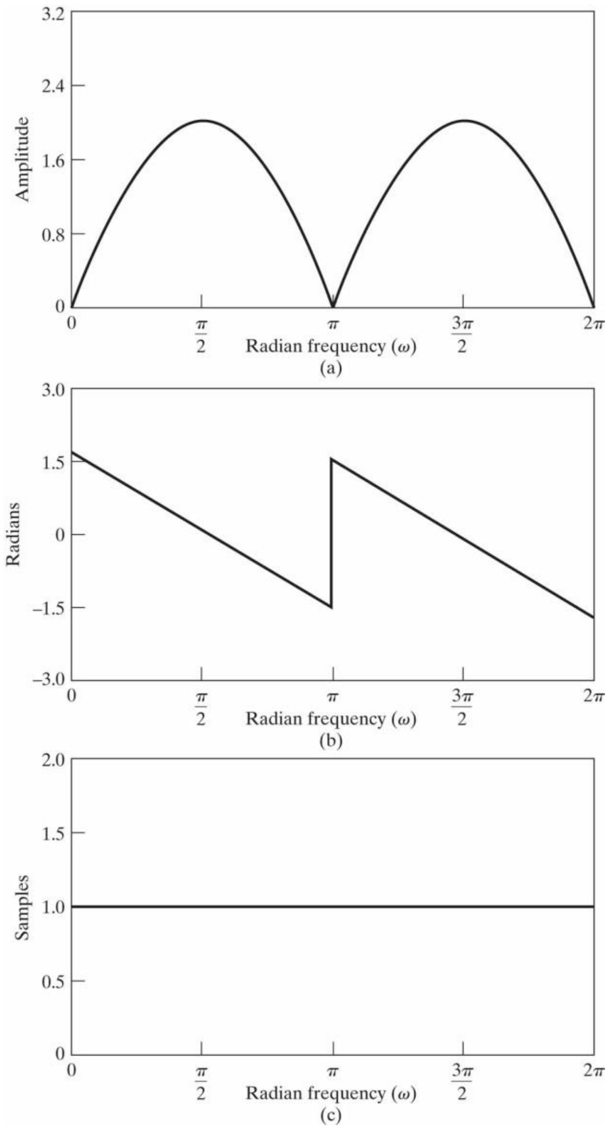


Figure 5.35 Frequency response of type II system of Example 5.16. (a) Magnitude. (b) Phase. (c) Group delay.



Type II,

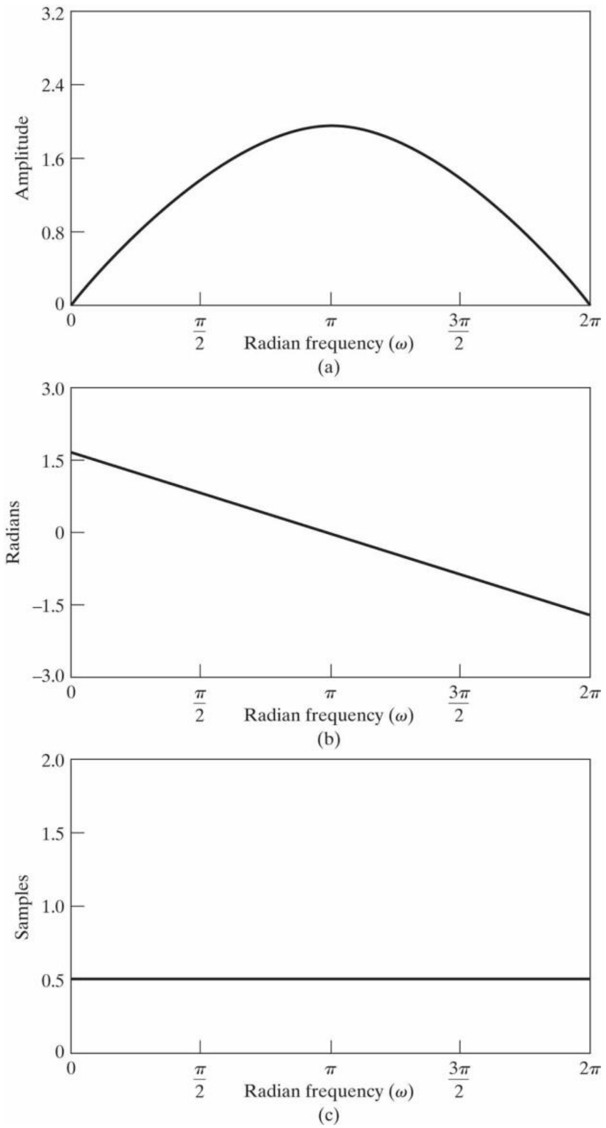
Figure 5.36 Frequency response of type III system of Example 5.17. (a) Magnitude. (b) Phase. (c) Group delay.



: Type III

فاز خطی تعمیم یافته

Figure 5.37 Frequency response of type IV system of Example 5.18. (a) Magnitude. (b) Phase. (c) Group delay.

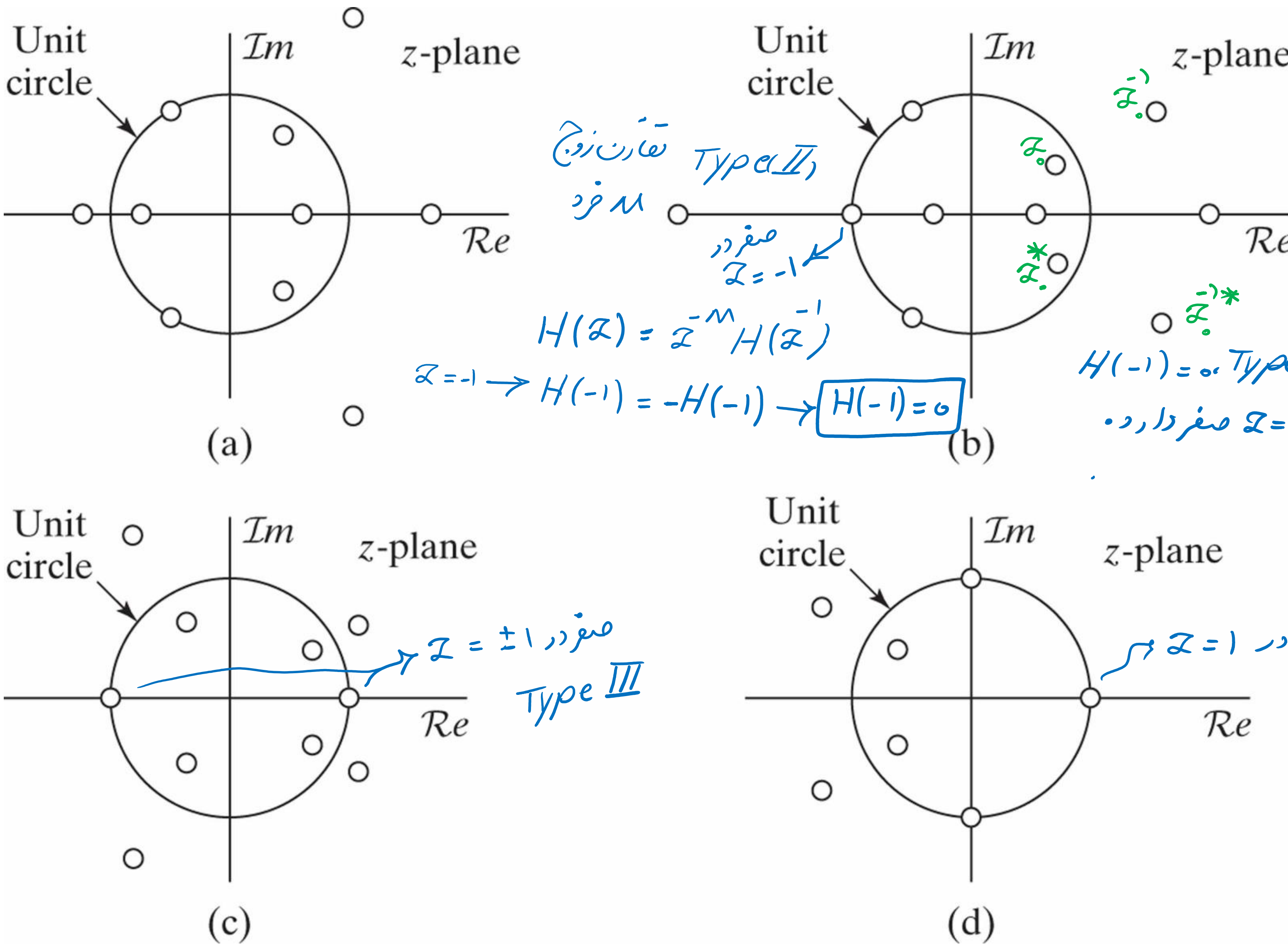


Type IV

محل صفر و قطبها :

قطبها در مبدأ قرار دارند و برای سادگی شکل رسم نشده‌اند.

Figure 5.38 Typical plots of zeros for linear-phase systems. (a) Type I. (b) Type II. (c) Type III. (d) Type IV.



Type II ، تقارن زوج M فرد

صفر در $z=-1$

z_0 , $\frac{1}{z_0}$, z_0^* , $\frac{1}{z_0^*}$

$H(z) = z^{-M} H(z^{-1})$

$z=-1 \rightarrow H(-1) = -H(-1) \rightarrow \boxed{H(-1)=0}$

همواره در Type II ، $H(-1)=0$ ، در $z=-1$ صفر دارد.

صفر در $z=\pm 1$ Type III

صفر در $z=1$ Type IV

نتیجه:

با Type(II) و Type(III) نمی‌توان فیلتر HPF ساخت. زیرا در $z=-1$ که متناظر با فرکانس بالا است صفر دارد

با Type III و Type IV نمی‌توان فیلتر LPF ساخت. زیرا در $z=1$ که متناظر با فرکانس پایین است صفر دارد.

در حالت کلی با ضرایب جمع صفر نمی‌توان LPF ساخت زیرا مولفه‌های DC را حذف می‌کند.

$$H(e^{j\omega}) = \sum h[n] e^{-j\omega n} \Rightarrow H(e^{j\omega})\Big|_{\omega=0} = \sum h[n] \underset{\text{فرض}}{=} 0$$

7.4 ارتباط بین سیستم های فاز خطی FIR و سیستم های کمینه فاز:

سیستم فاز خطی FIR $\quad H(z) = H_{min}(z)\, H_{uc}(z)\, H_{max}(z)$

کمینه فاز $\qquad$ Unit Circle $\qquad$ بیشینه فاز

$$H_{max}(z) = H_{min}(z^{-1})\, z^{-M_i}$$

تعداد صفرهای $H_{min}(z)$: M_i

$H_{uc}(z)$: M_o صفر روی دایره واحد

تعداد کل صفرها $M = 2M_i + M_o$

مثال : تجزیه سیستم با فاز خطی :

از مثال 13 جبران سازی $\rightarrow$ $H_{max}(z) = (0{,}9)^2 (1 - 1{,}1111\, e^{j0{,}6\pi} z^{-1})(1 - 1{,}1111\, e^{-j0{,}6\pi} z^{-1})$
$\times (1 - 1{,}25\, e^{-j0{,}8\pi} z^{-1})(1 - 1{,}25\, e^{j0{,}8\pi} z^{-1})$ $\rightarrow$ Fig 39

سیستم با فاز خطی $\underline{H(z)} = H_{min}(z)\, H_{max}(z)$ $\longrightarrow$ Fig 40

$\mathrm{grd}\,[H(e^{j\omega})] = M_i = 4$
برای این مثال

Figure 5.39 Frequency response of maximum-phase system having the same magnitude as the system in Figure 5.25. (a) Log magnitude. (b) Phase (principal value). (c) Group delay.

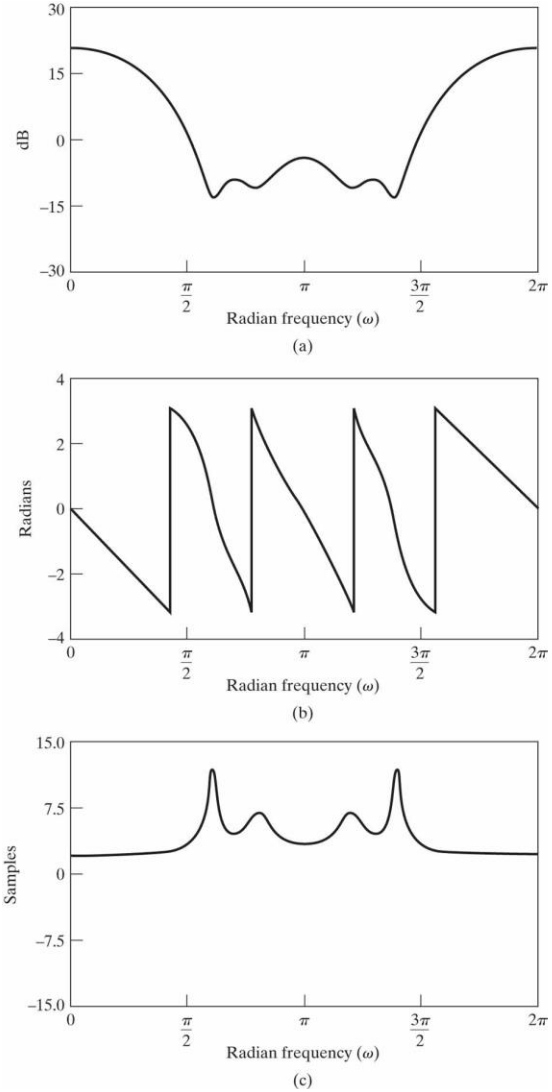
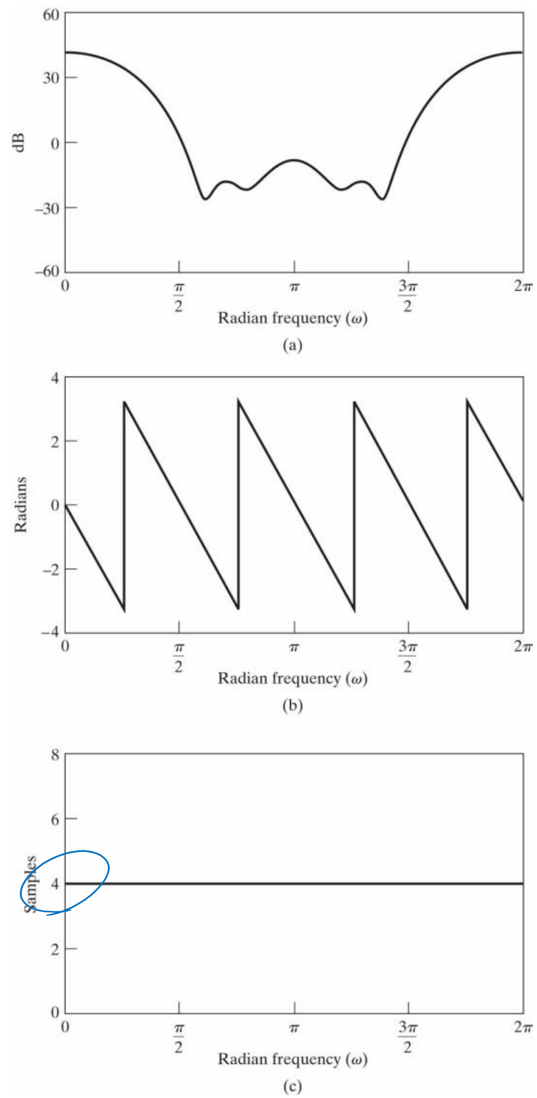


Figure 5.40 Frequency response of cascade of maximum-phase and minimum-phase systems, yielding a linear-phase system. (a) Log magnitude. (b) Phase (principal value). (c) Group delay.



فاز خطی

ثابت

Figure P5.1-1

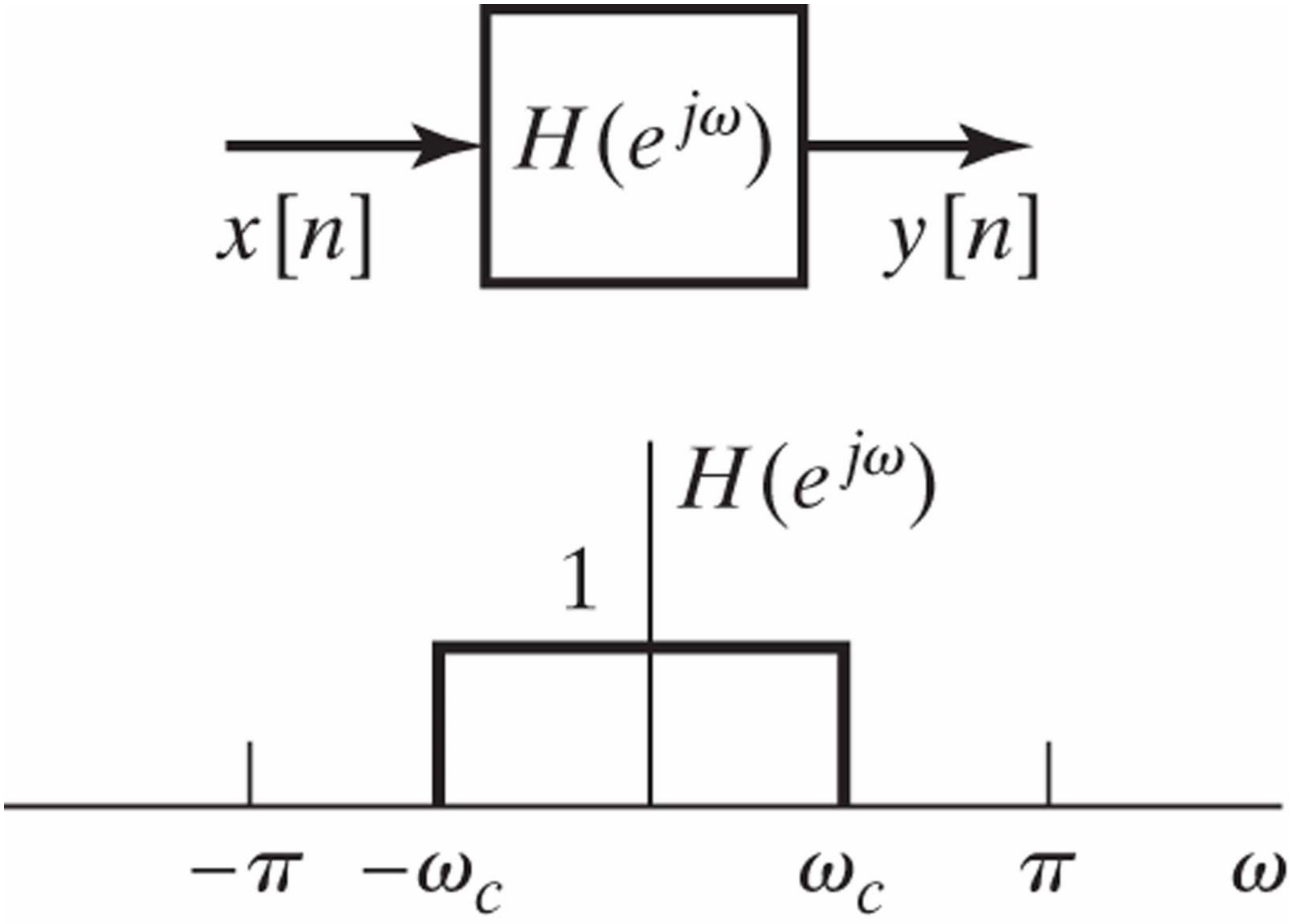


Figure P5.1-2

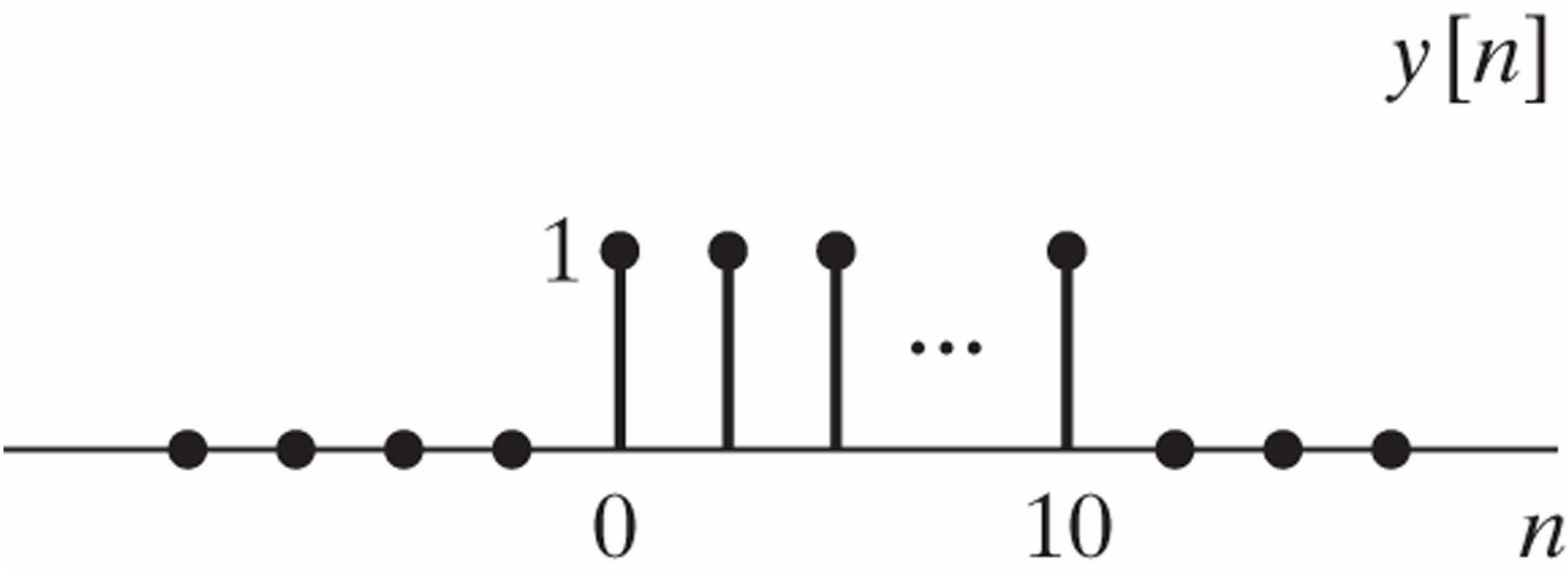


Figure P5.10

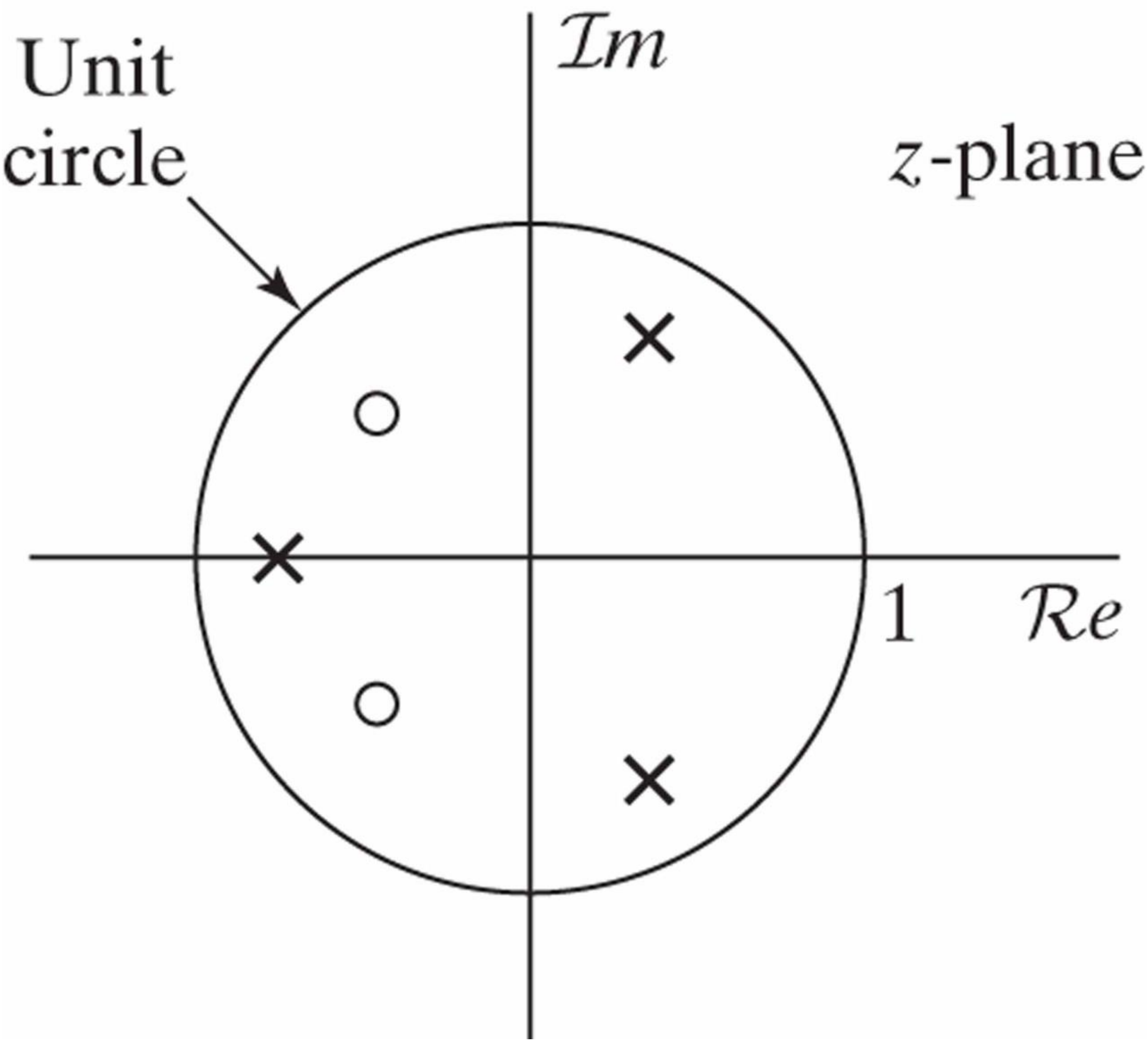


Figure P5.11

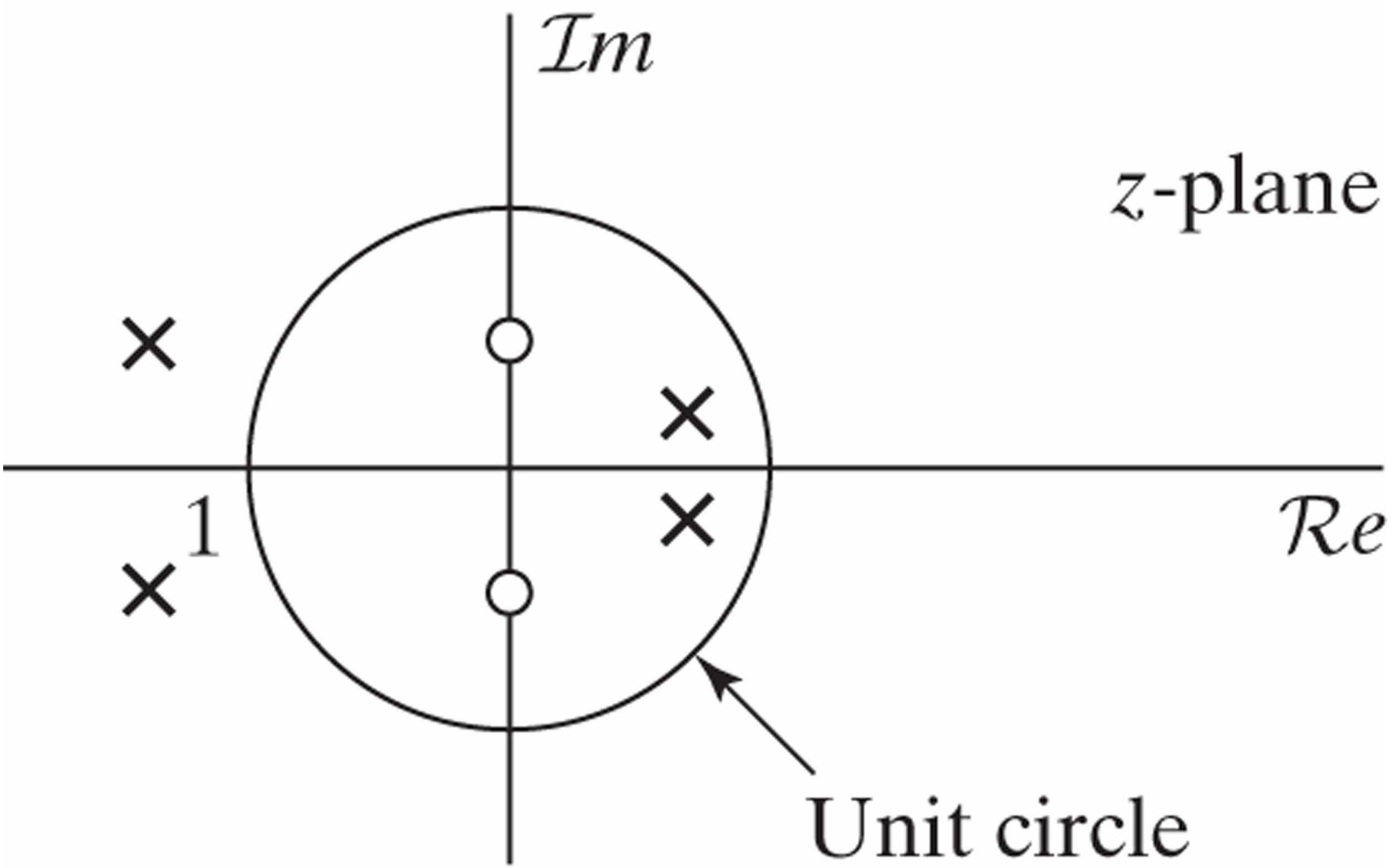
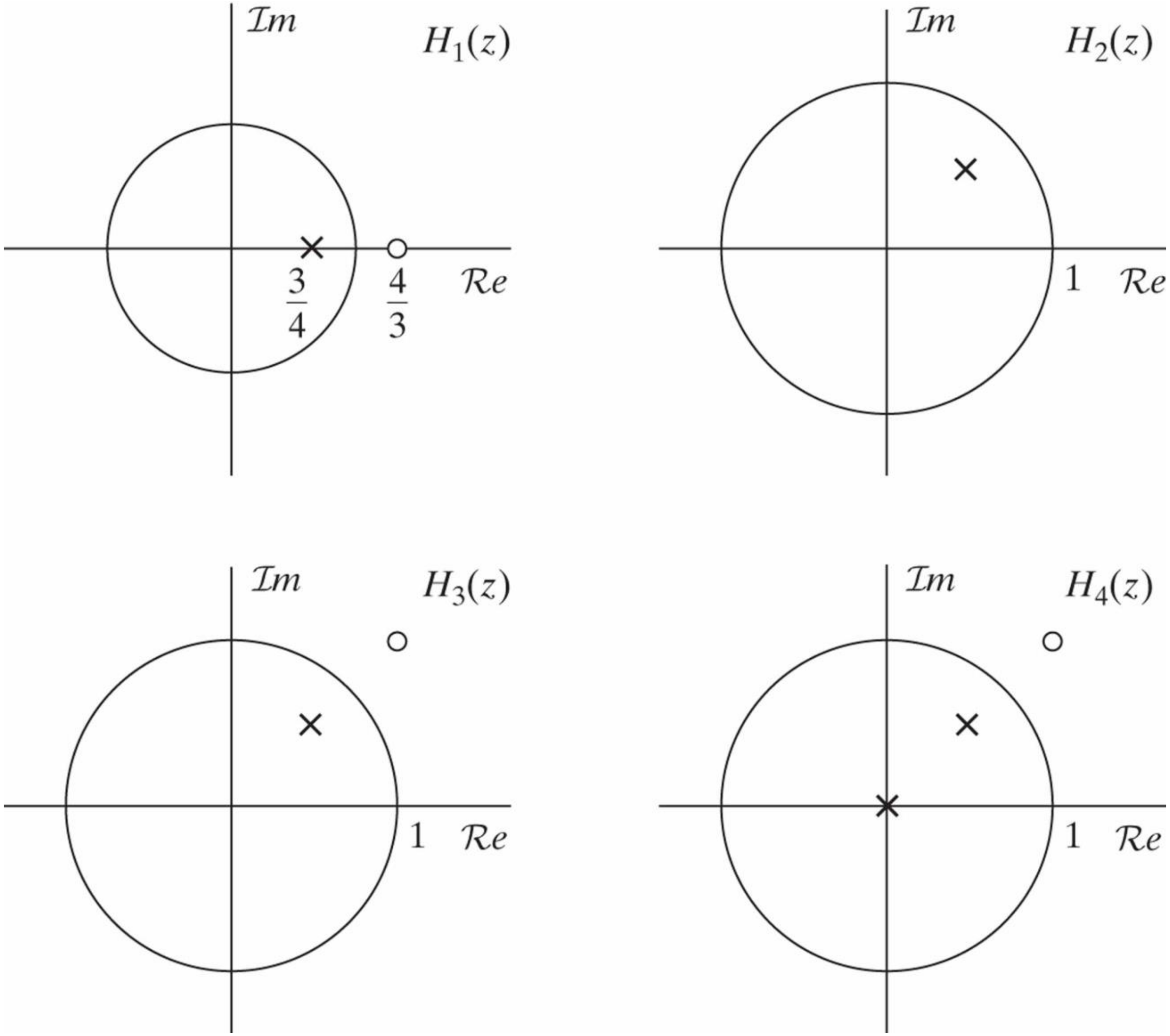


Figure P5.13



$\mathcal{I}m$
$H_1(z)$
$\frac{3}{4}$
$\frac{4}{3}$
$\mathcal{R}e$
$\mathcal{I}m$
$H_2(z)$
1
$\mathcal{R}e$
$\mathcal{I}m$
$H_3(z)$
1
$\mathcal{R}e$
$\mathcal{I}m$
$H_4(z)$
1
$\mathcal{R}e$

Figure P5.15

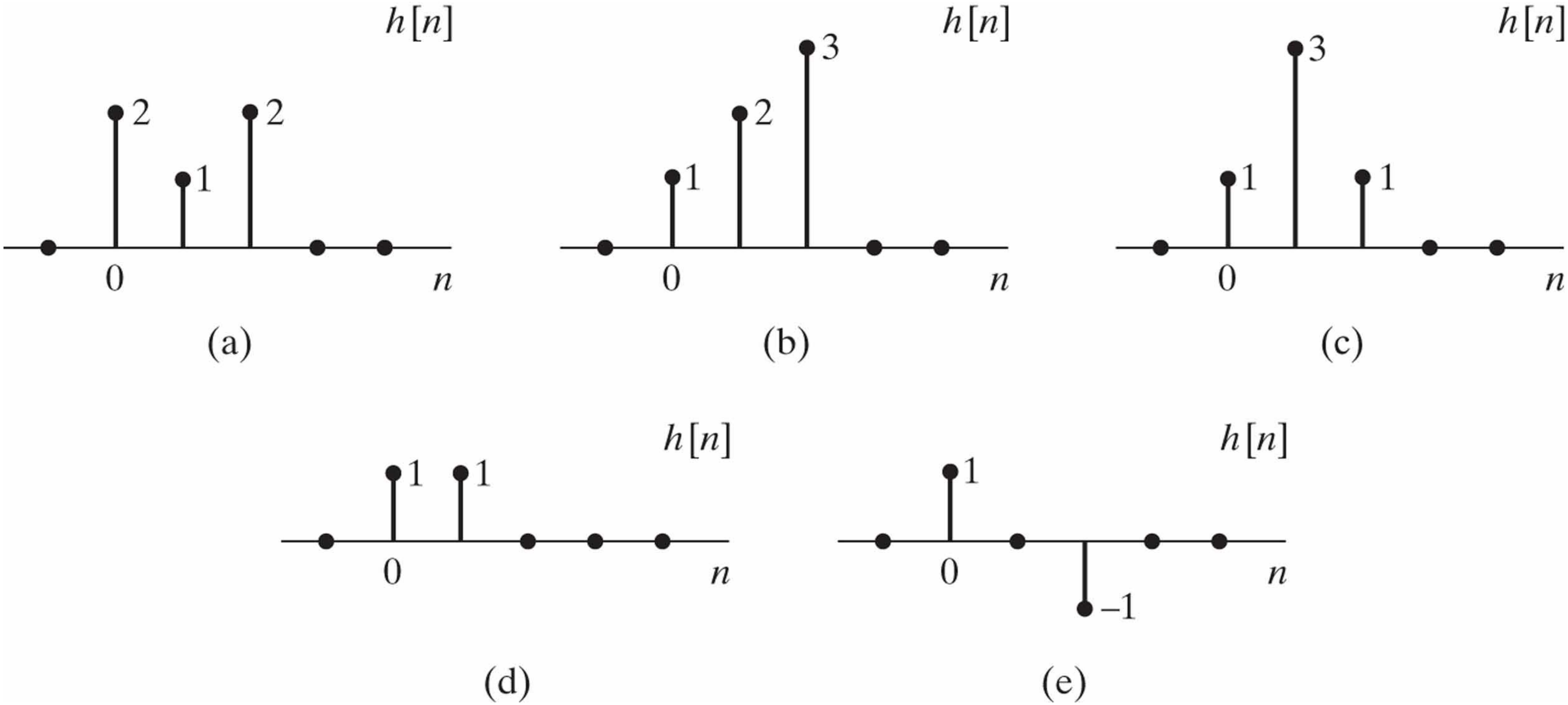


Figure P5.16

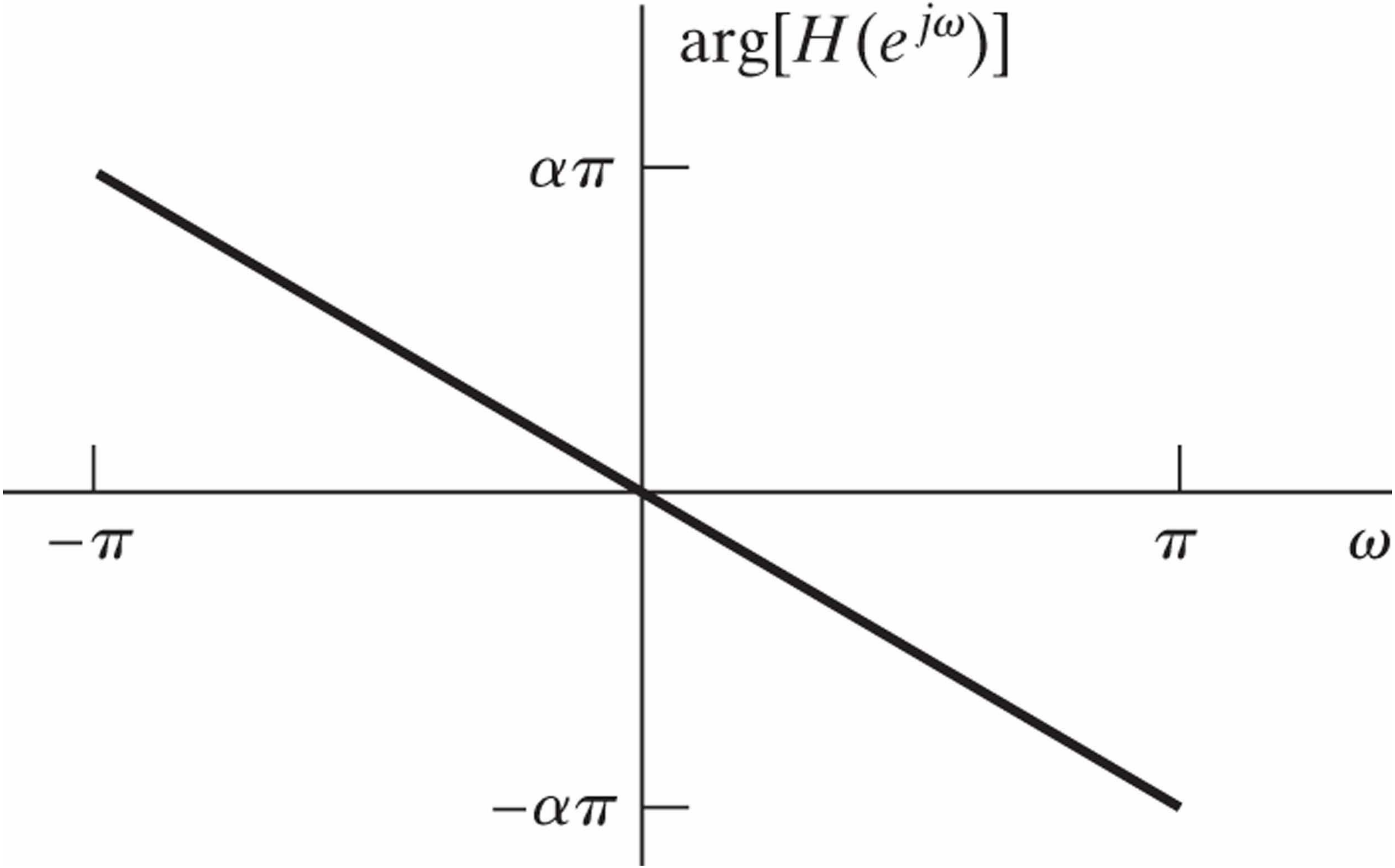
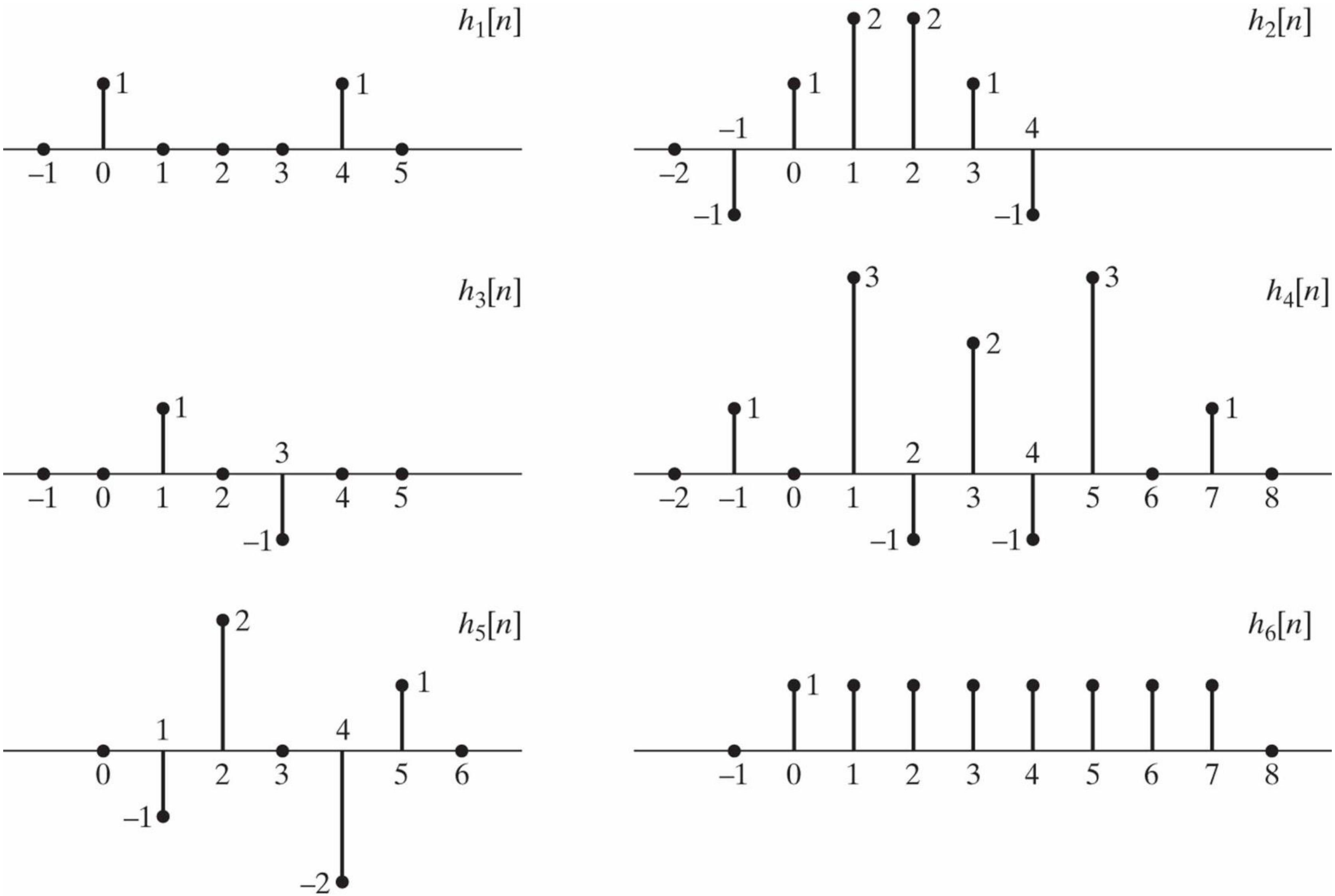
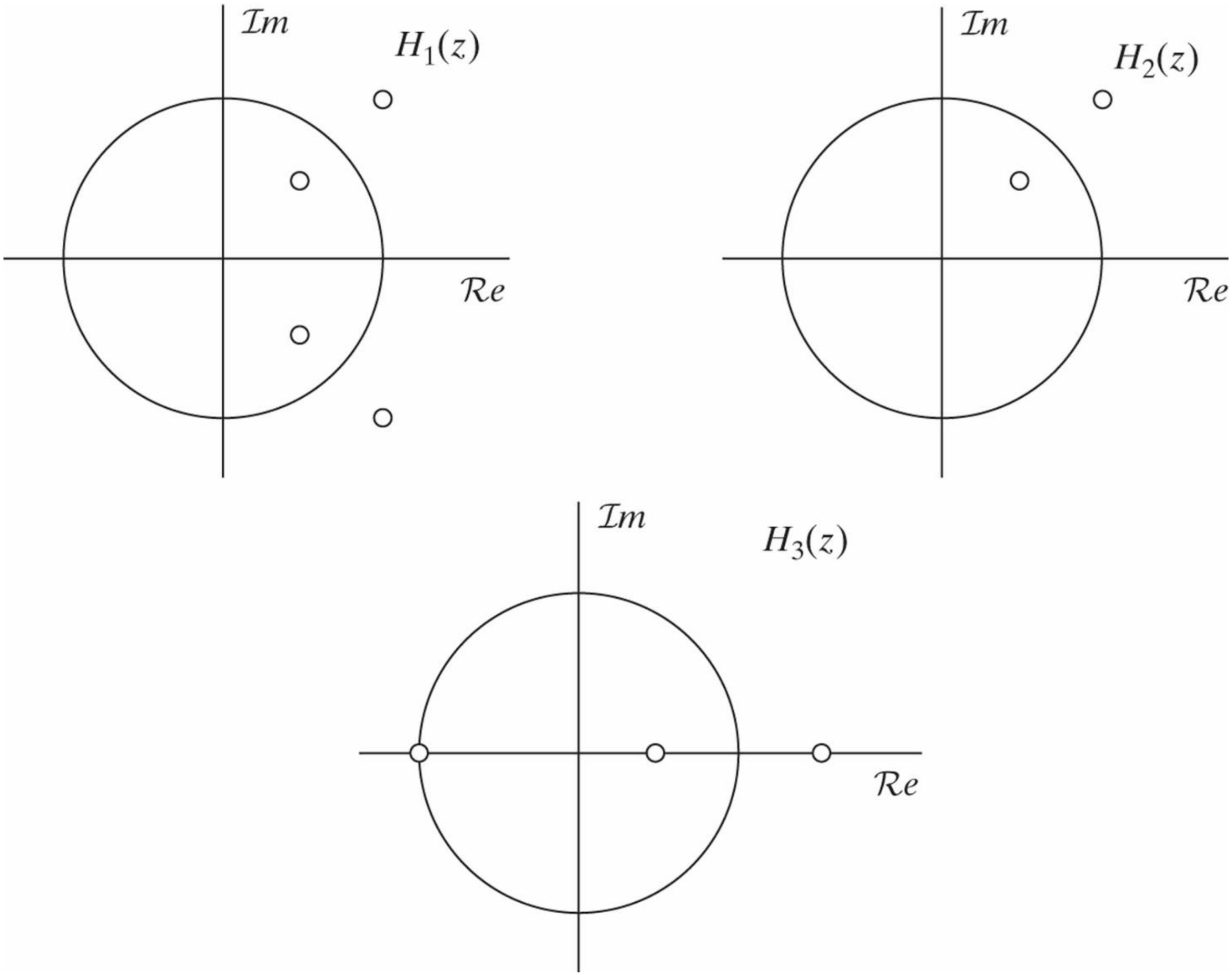


Figure P5.19



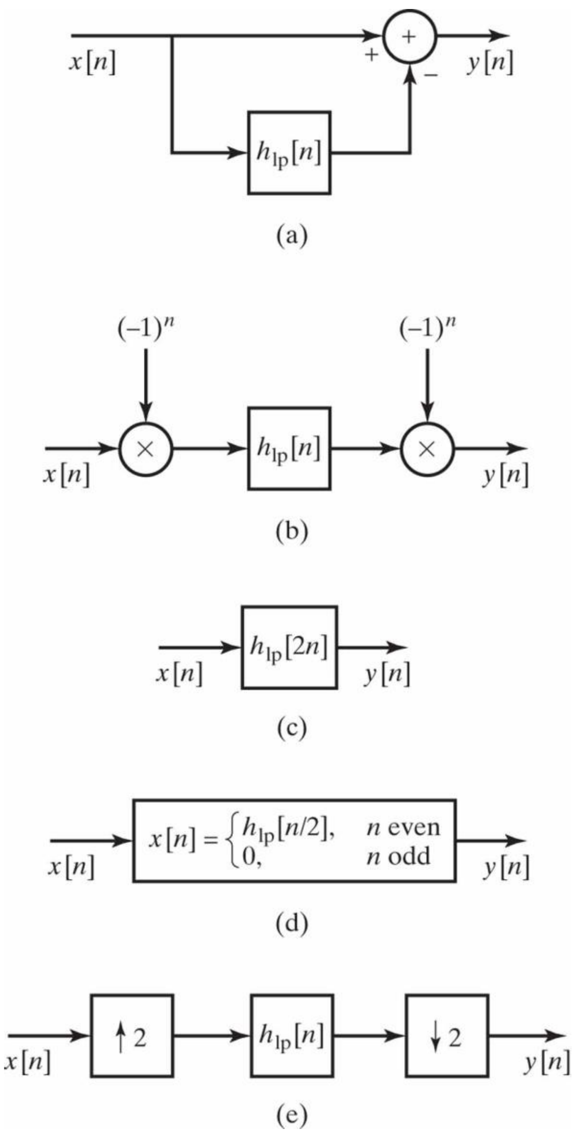
$h_1[n]$
1
1
–1
0
1
2
3
4
5
$h_2[n]$
2
2
1
1
–1
4
–2
0
1
2
3
–1
–1
$h_3[n]$
1
3
–1
0
1
2
4
5
–1
$h_4[n]$
3
3
2
1
1
2
4
–2
–1
0
1
3
5
6
7
8
–1
–1
$h_5[n]$
2
1
1
4
0
2
3
5
6
–1
–2
$h_6[n]$
1
–1
0
1
2
3
4
5
6
7
8

Figure P5.20



$\mathcal{I}m$
$H_1(z)$
$\mathcal{R}e$
$\mathcal{I}m$
$H_2(z)$
$\mathcal{R}e$
$\mathcal{I}m$
$H_3(z)$
$\mathcal{R}e$

Figure P5.21



x[n]
+
+
−
y[n]
h_lp[n]
(a)
(−1)^n
(−1)^n
x[n]
h_lp[n]
y[n]
(b)
x[n]
h_lp[2n]
y[n]
(c)
x[n]
x[n] = { h_lp[n/2], n even; 0, n odd
y[n]
(d)
x[n]
↑2
h_lp[n]
↓2
y[n]
(e)

Figure P5.24 Pole–zero diagram for $H(z)$.

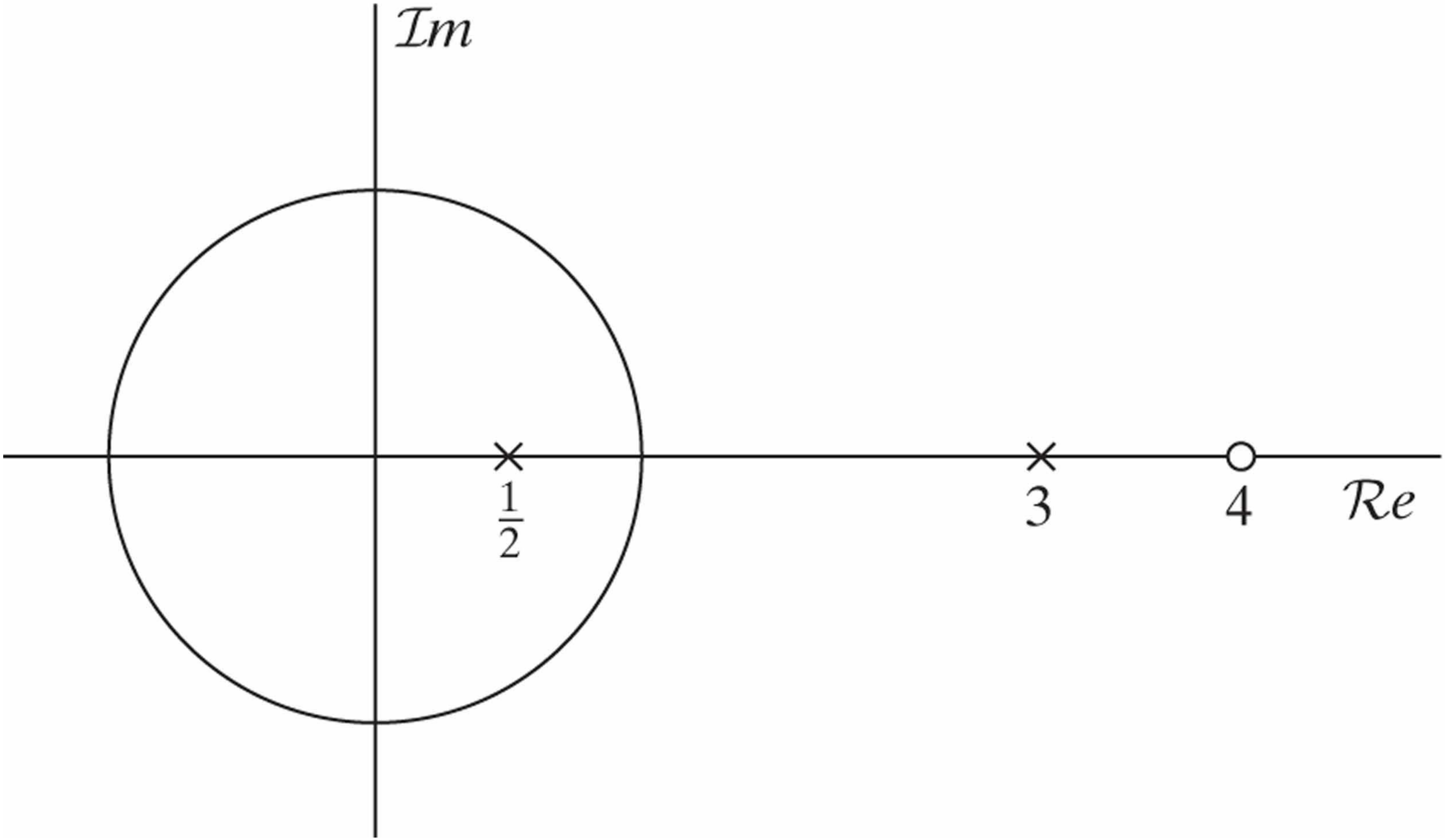


Figure P5.25

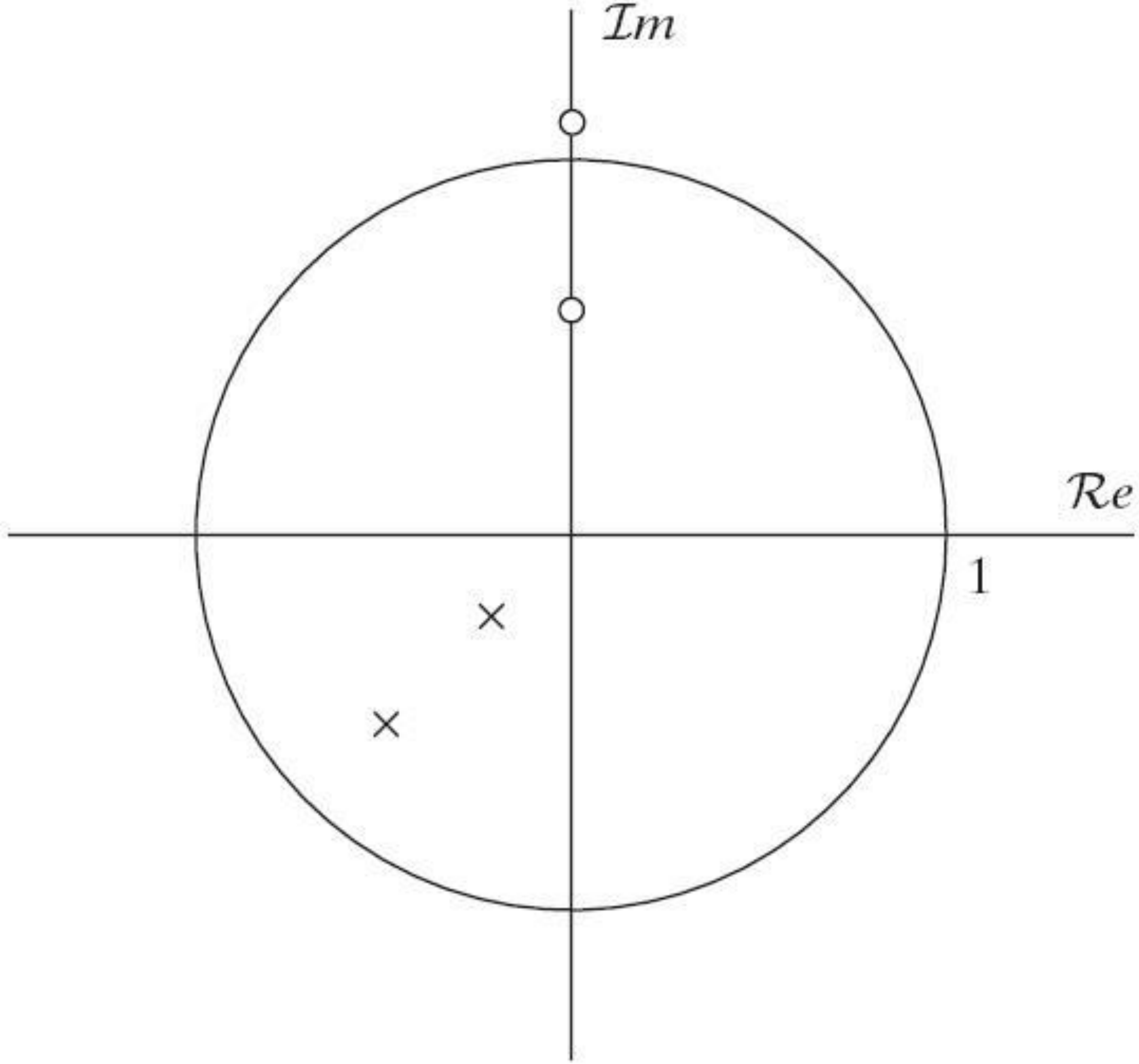


Figure P5.29

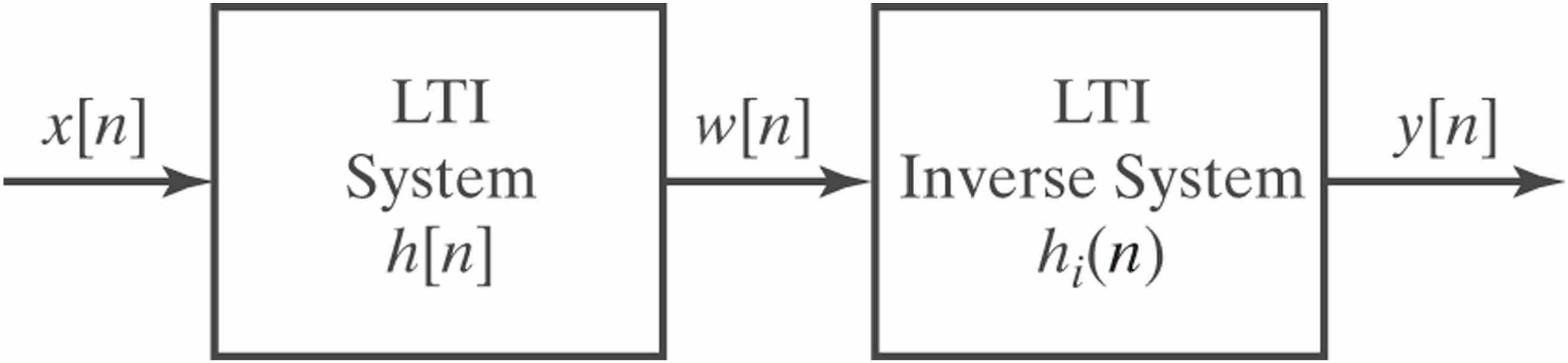


Figure P5.32

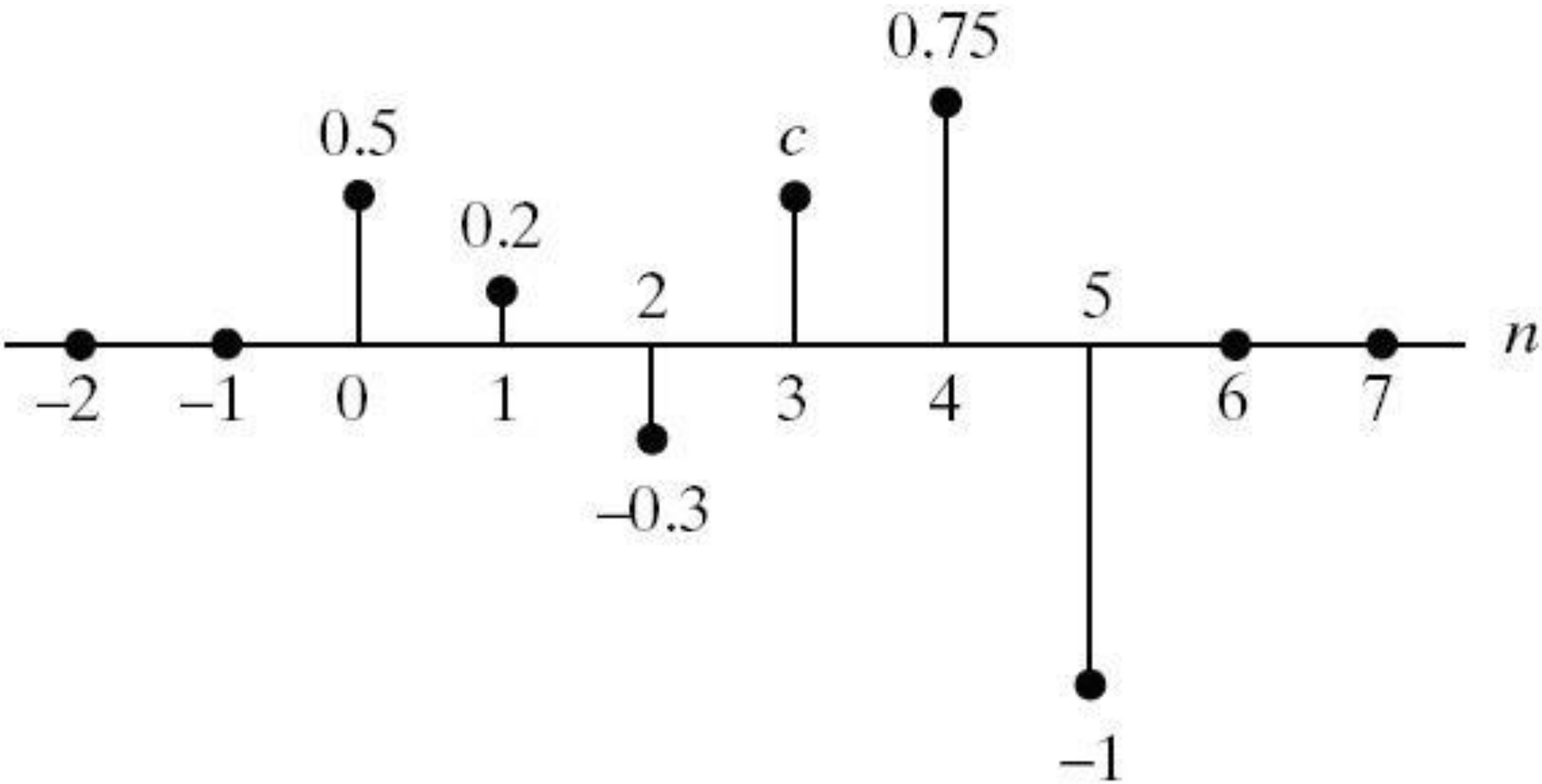


Figure P5.34-1 The input signal and the filter frequency response

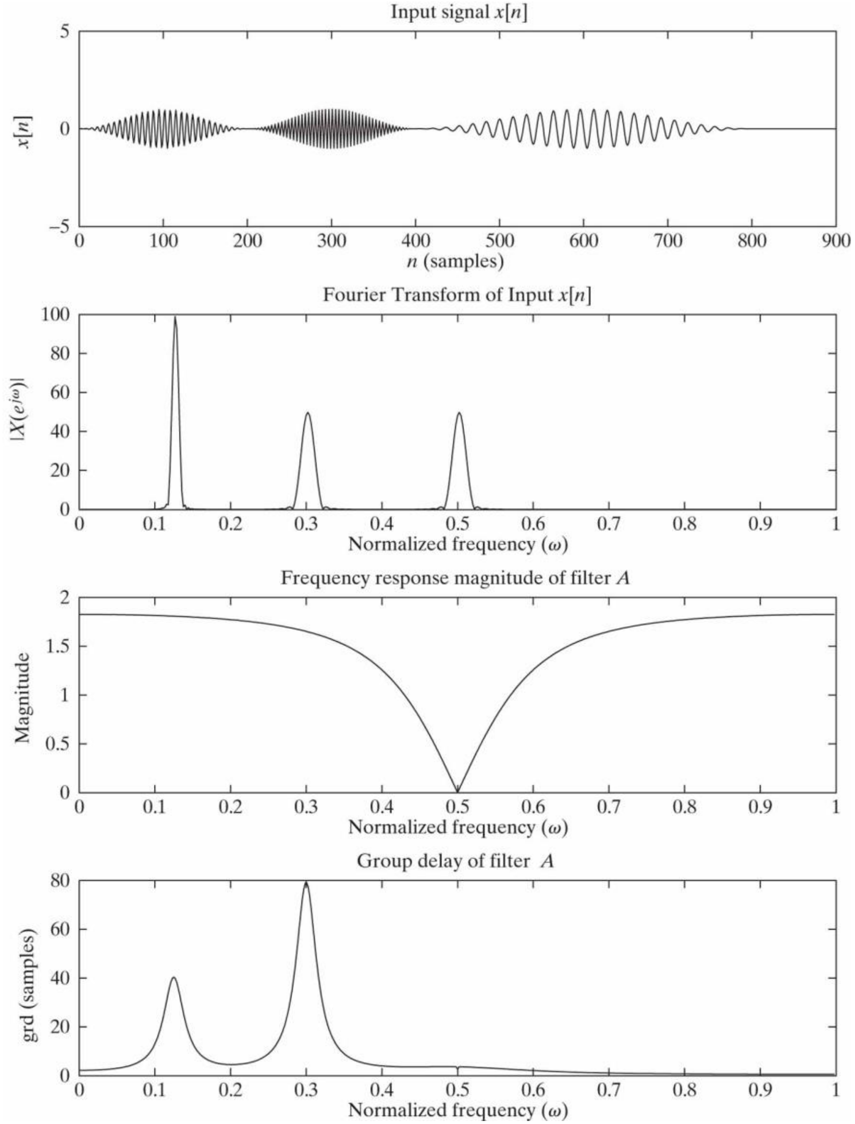


Figure P5.34-2 Possible output signals

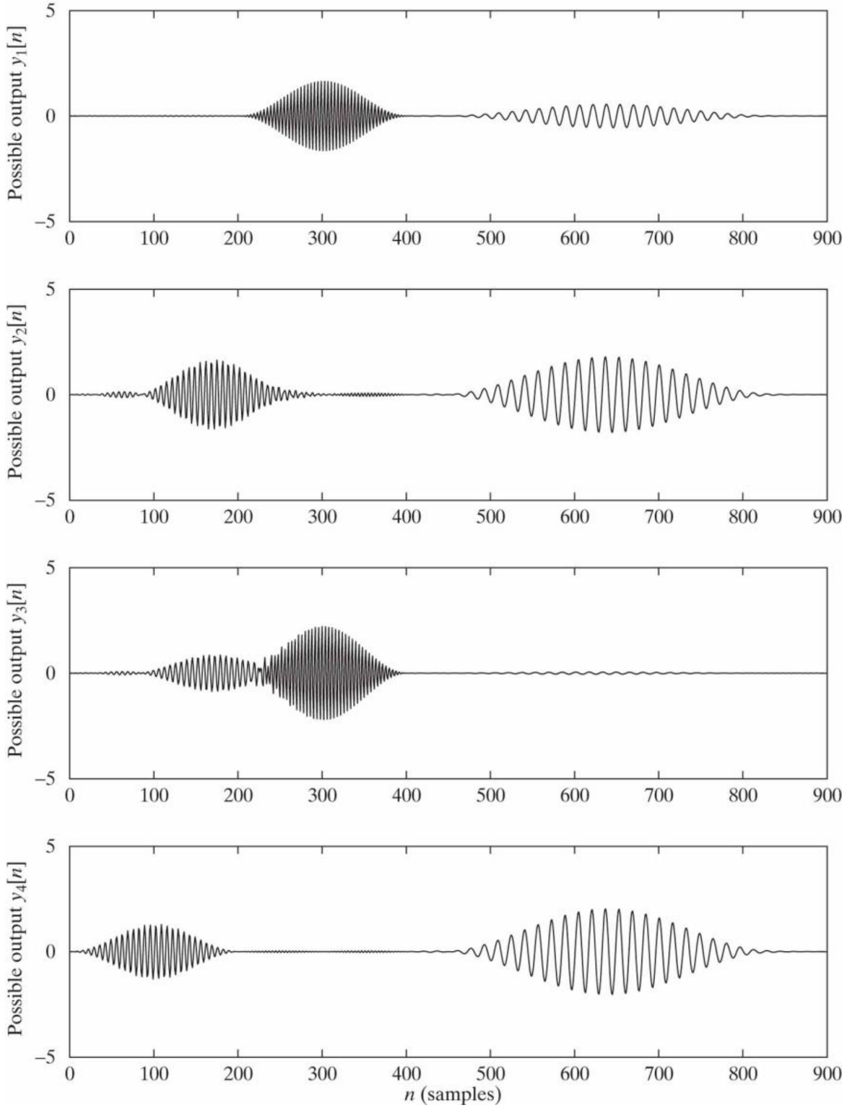


Figure P5.42

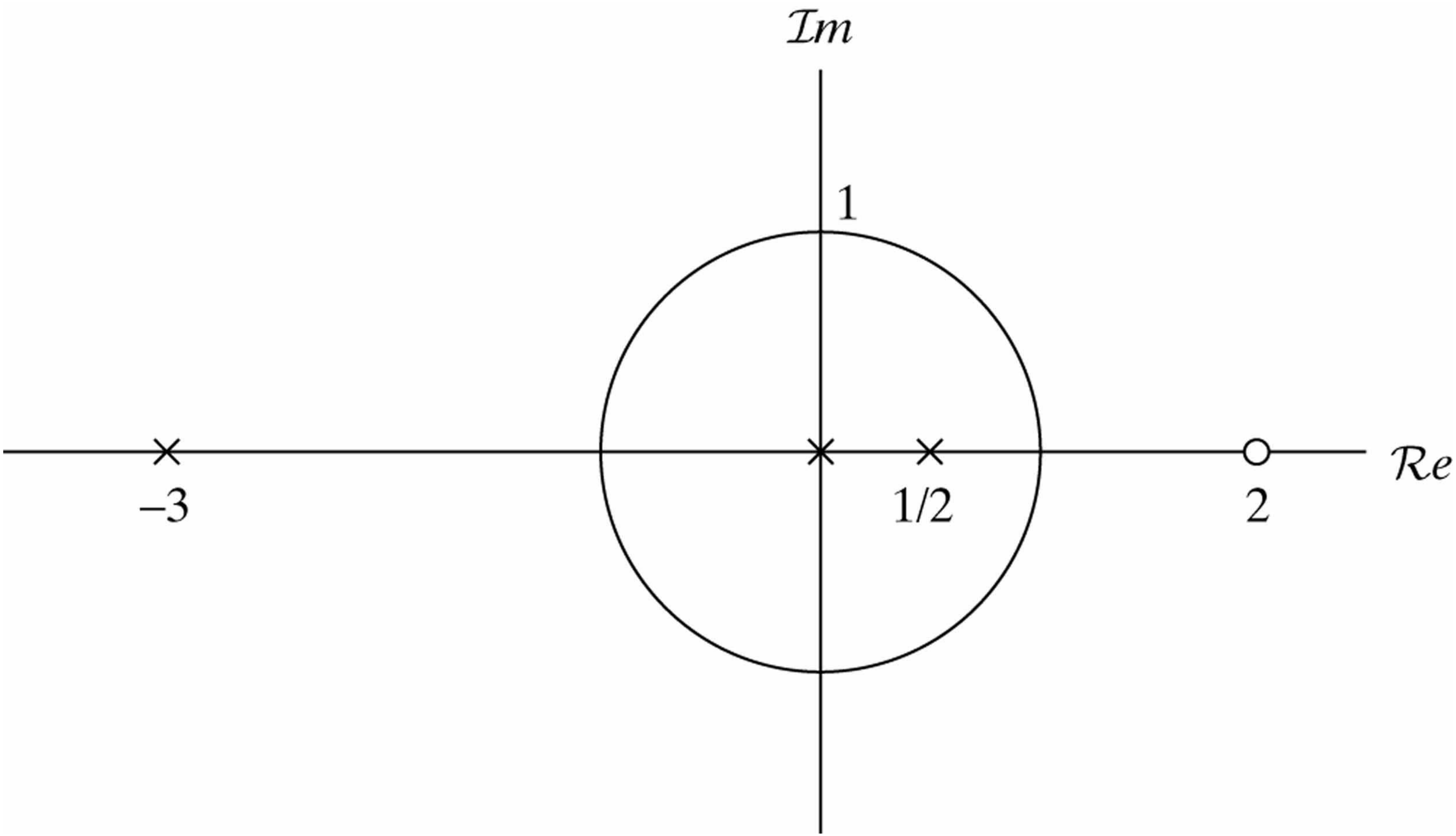
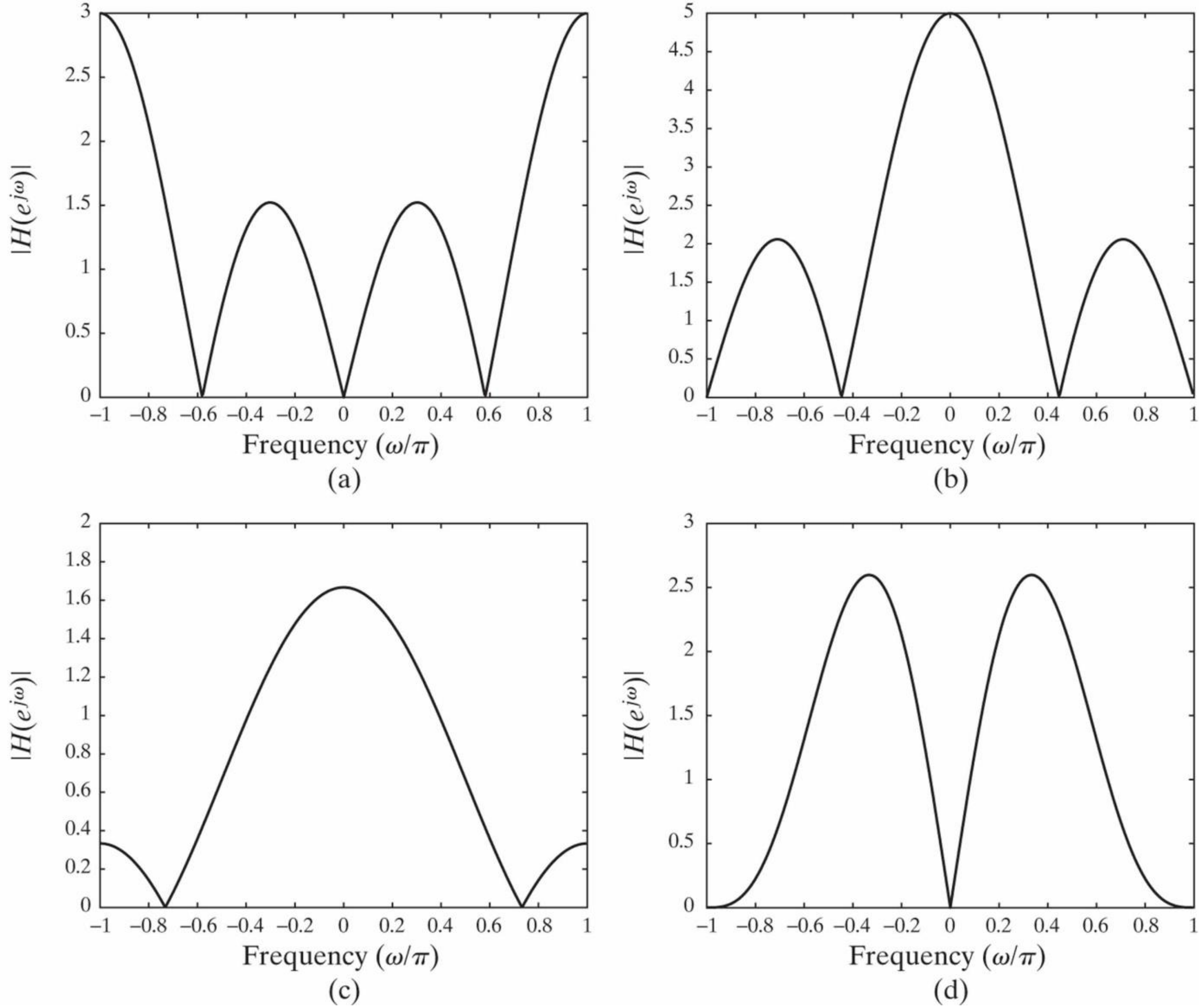


Figure P5.44



$|H(e^{j\omega})|$
Frequency (ω/π)
(a)
$|H(e^{j\omega})|$
Frequency (ω/π)
(b)
$|H(e^{j\omega})|$
Frequency (ω/π)
(c)
$|H(e^{j\omega})|$
Frequency (ω/π)
(d)

Figure P5.45

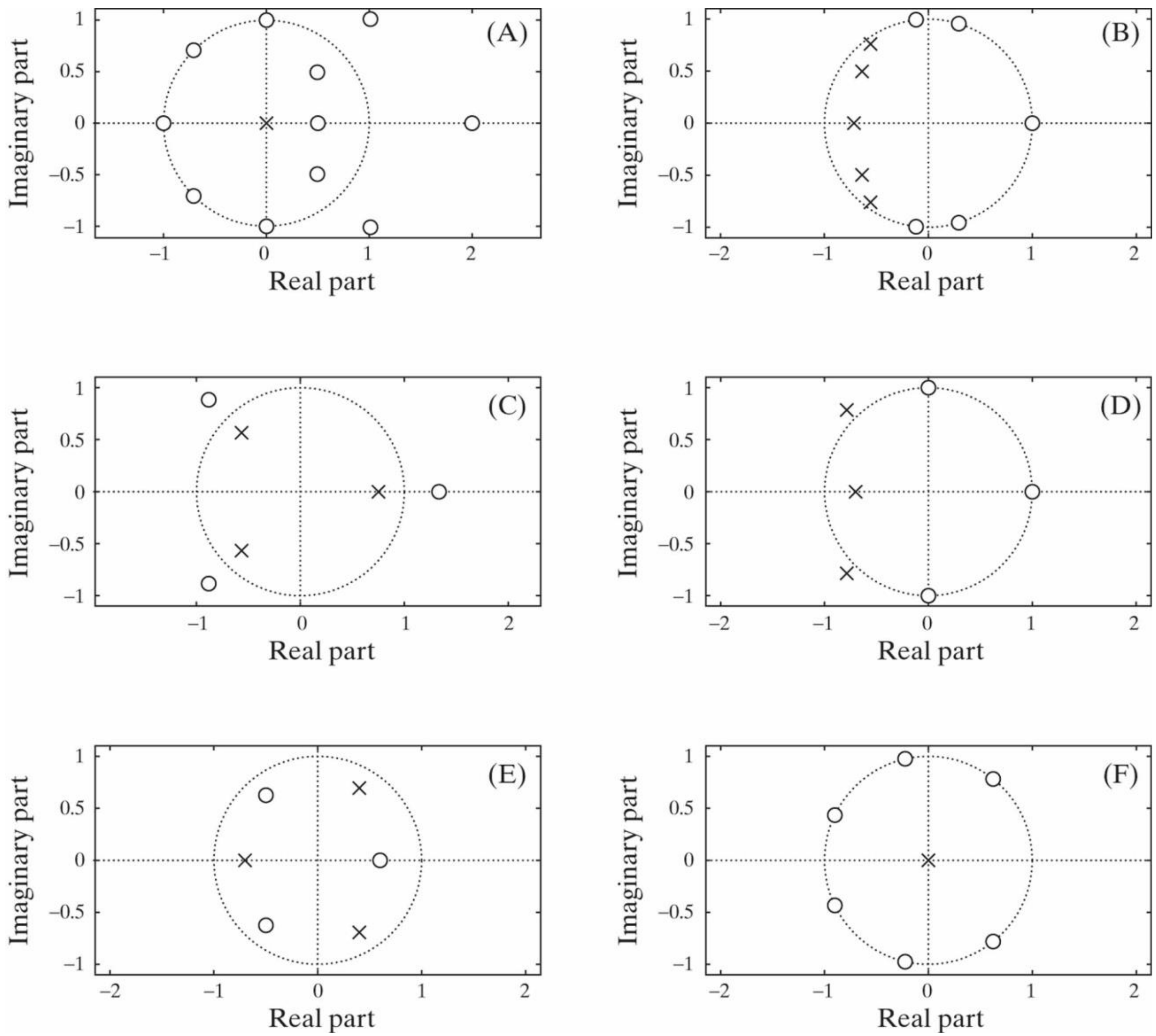


Figure P5.46

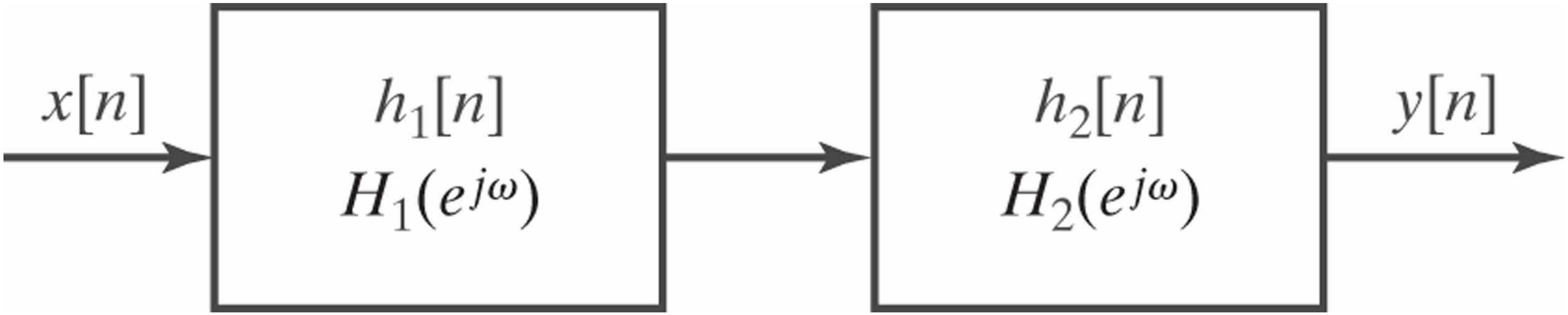


Figure P5.48

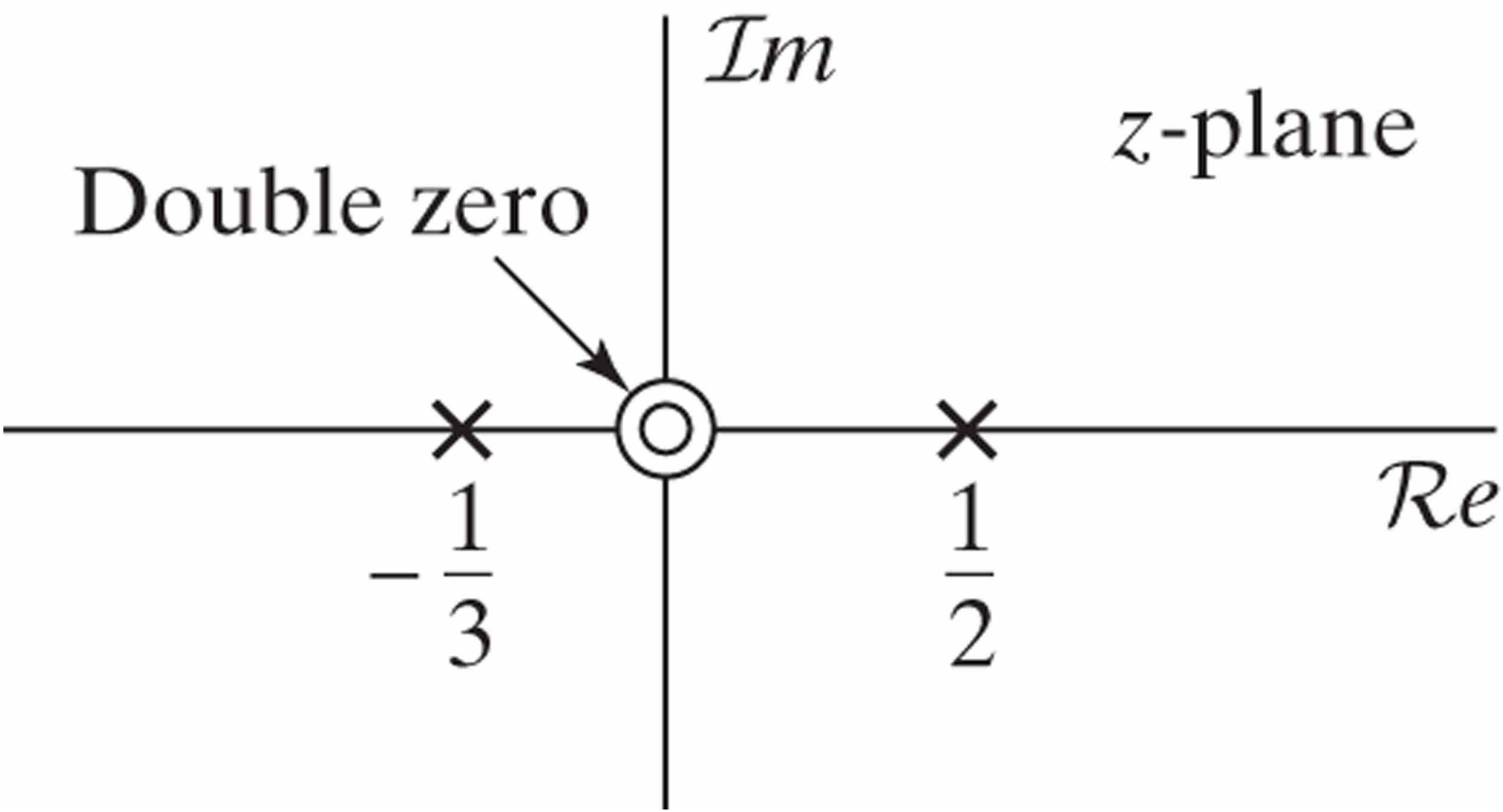


Figure P5.50

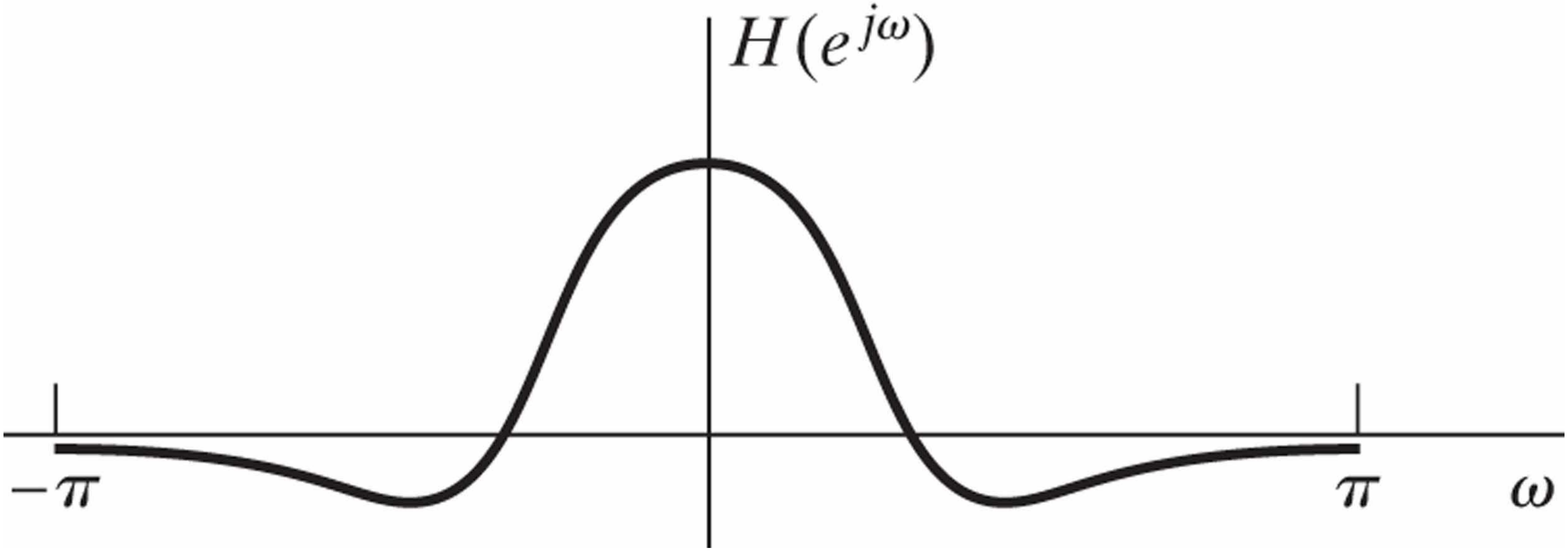


Figure P5.54

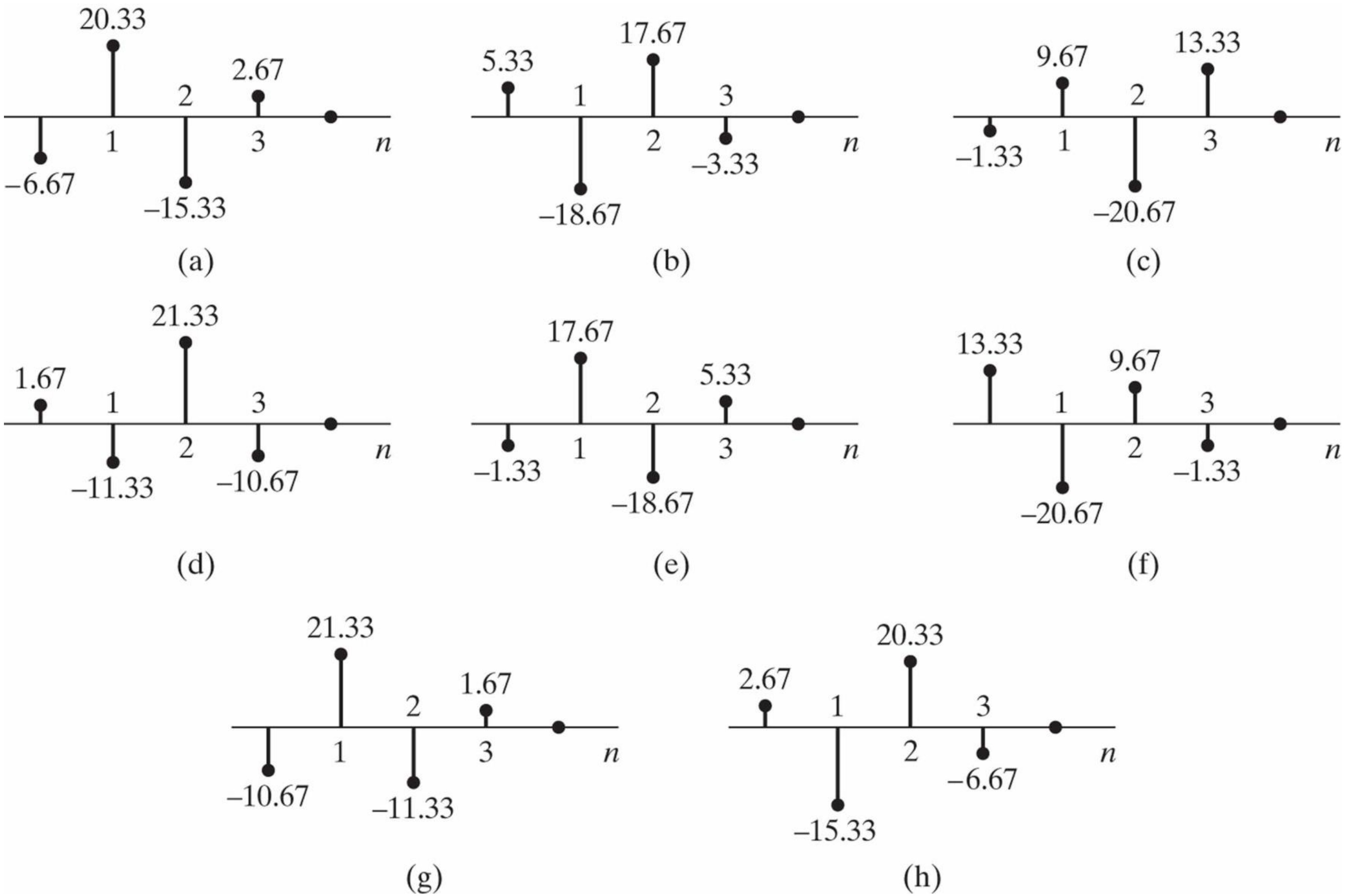
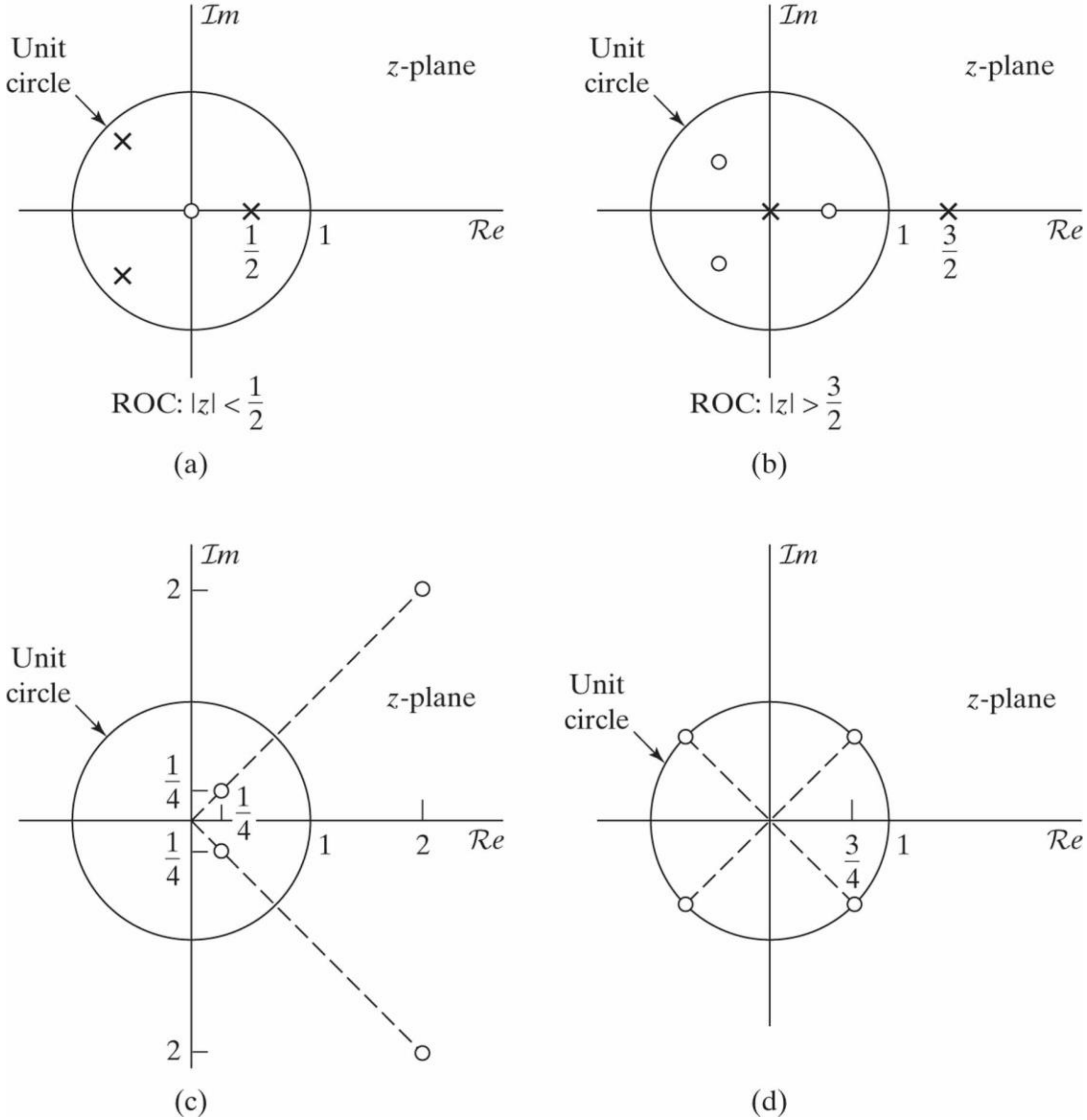

20.33
2.67
2
1
3
n
−6.67
−15.33
(a)
5.33
17.67
1
3
2
n
−3.33
−18.67
(b)
9.67
13.33
2
1
3
n
−1.33
−20.67
(c)
21.33
1.67
1
3
2
n
−11.33
−10.67
(d)
17.67
5.33
2
1
3
n
−1.33
−18.67
(e)
13.33
9.67
1
3
2
n
−1.33
−20.67
(f)
21.33
1.67
2
1
3
n
−10.67
−11.33
(g)
20.33
2.67
1
3
2
n
−6.67
−15.33
(h)

Figure P5.55



Im
Unit circle
z-plane
1/2
1
Re
ROC: |z| < 1/2
(a)
Im
Unit circle
z-plane
1
3/2
Re
ROC: |z| > 3/2
(b)
Im
2
Unit circle
z-plane
1/4
1/4
1/4
1
2
Re
2
(c)
Im
Unit circle
z-plane
3/4
1
Re
(d)

Figure P5.56

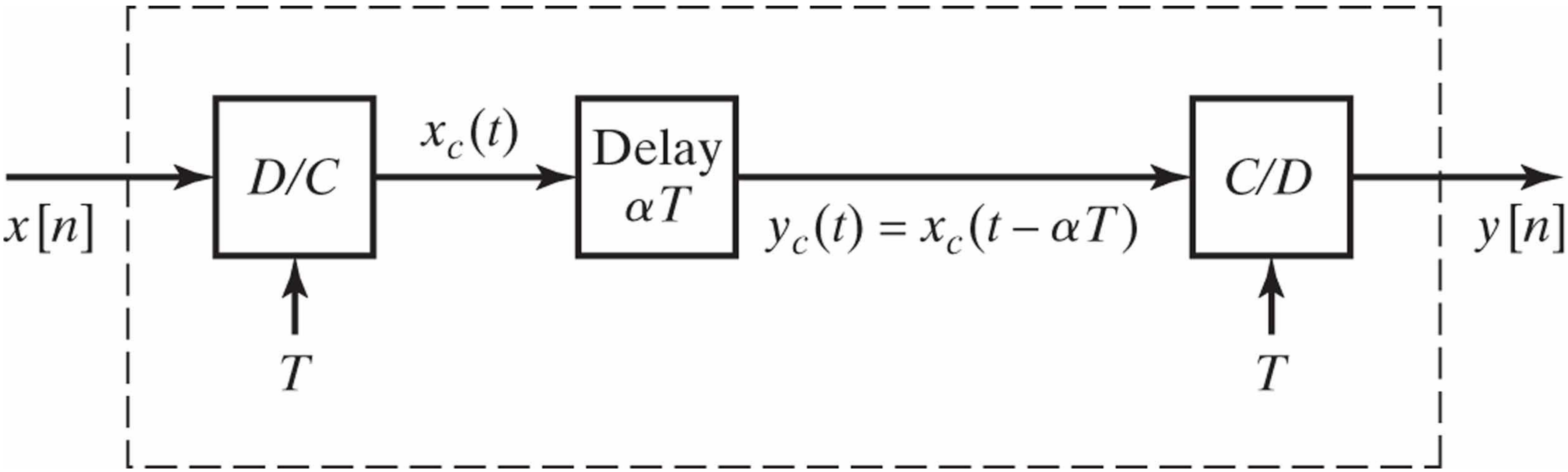


Figure P5.63-1

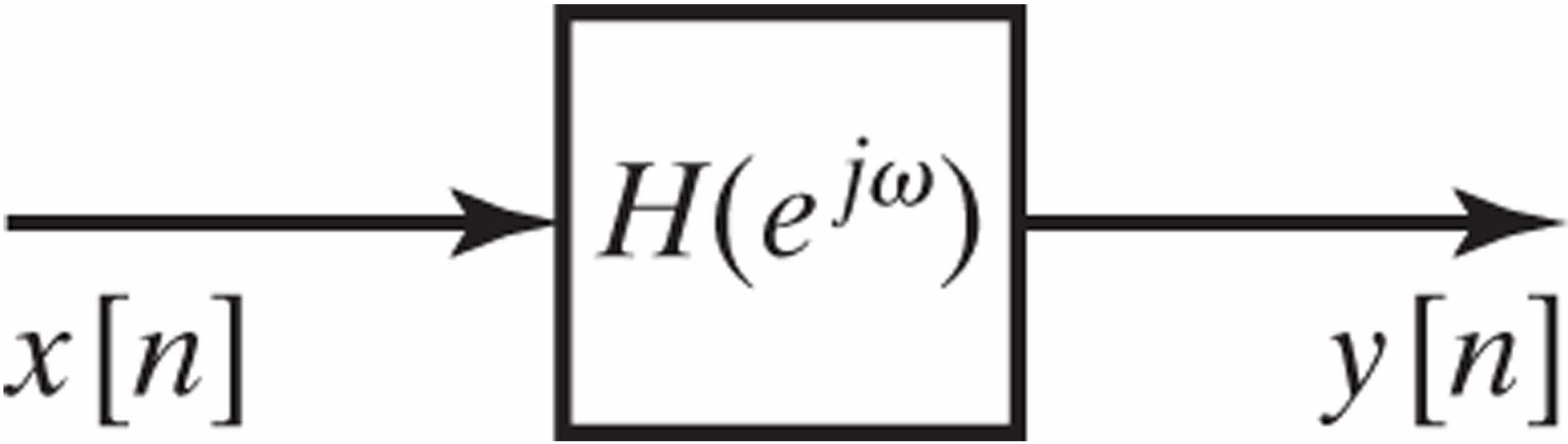


Figure P5.63-2

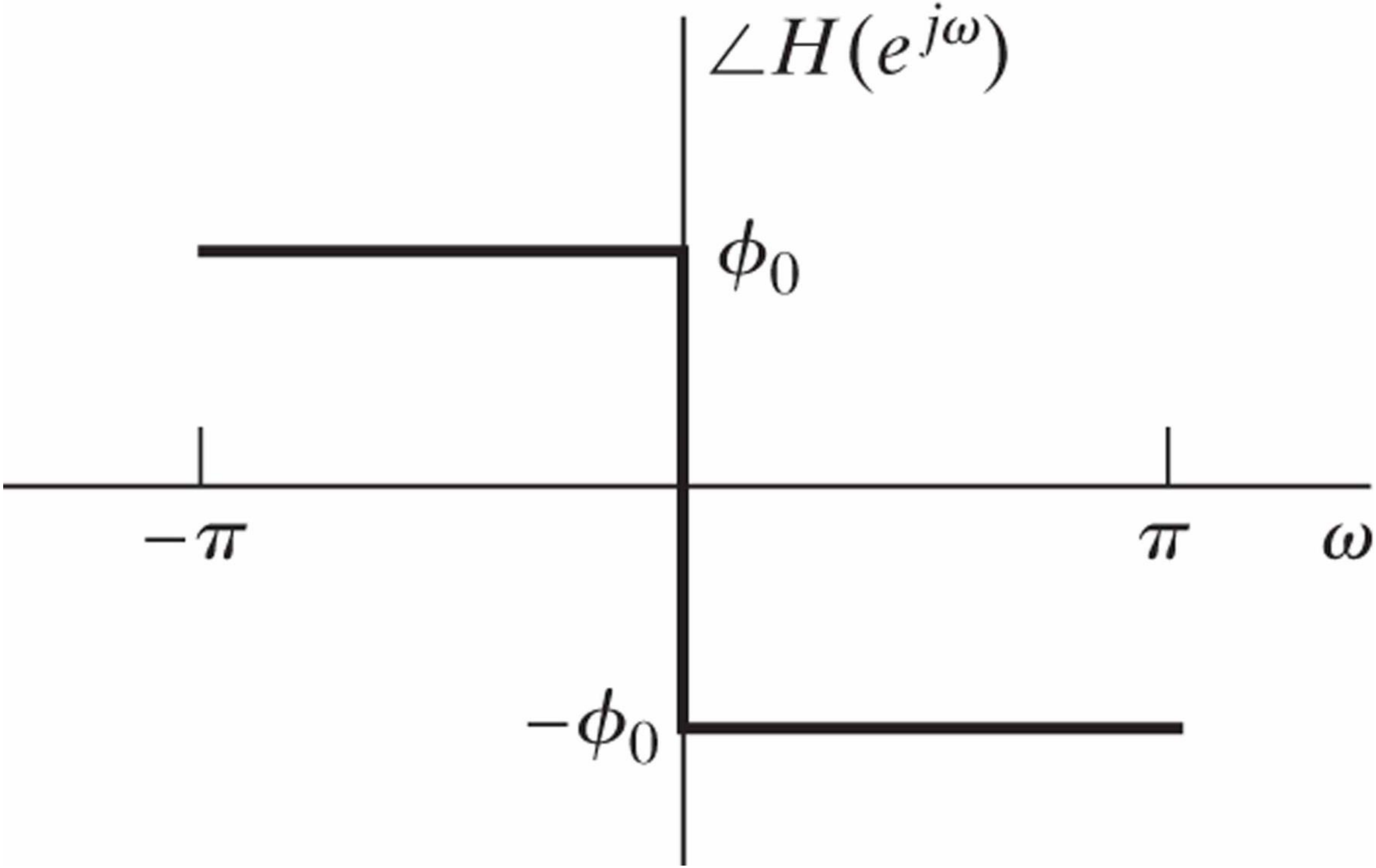


Figure P5.63-3

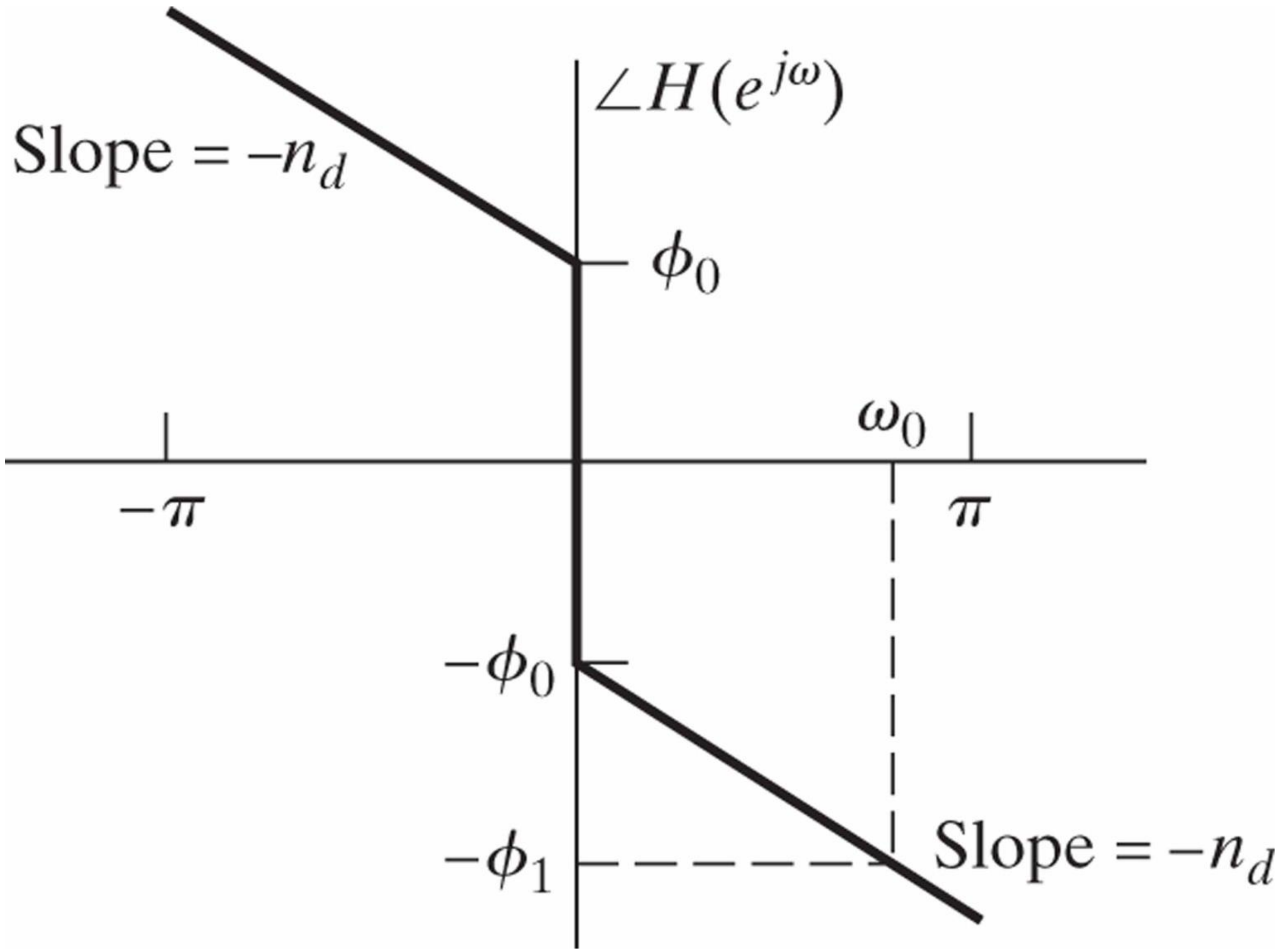


Figure P5.65-1

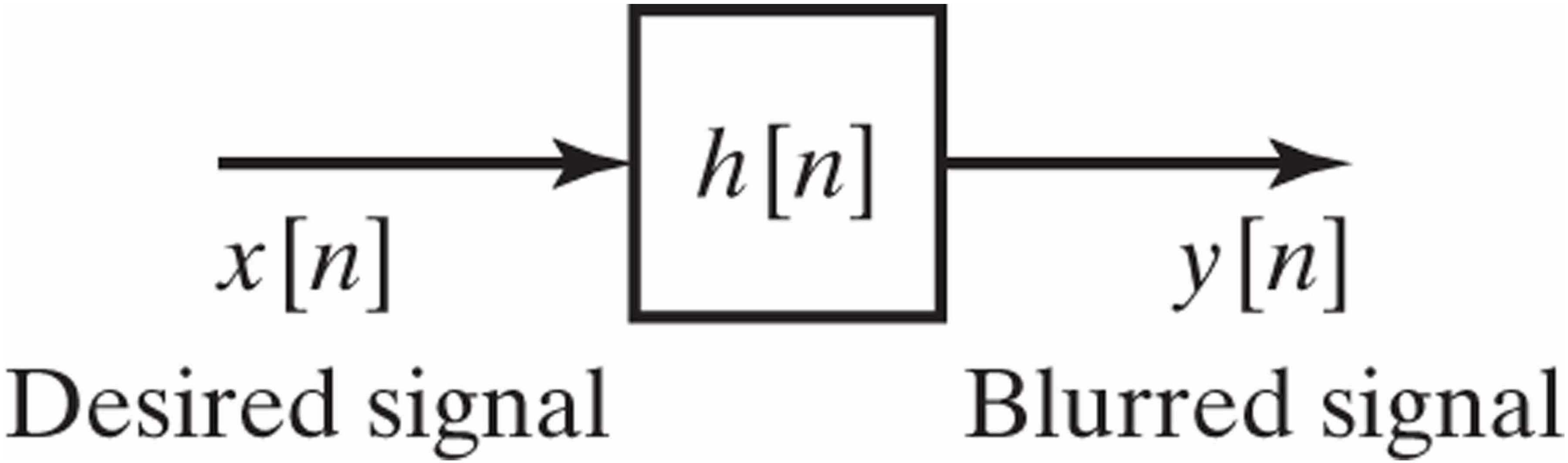


Figure P5.65-2

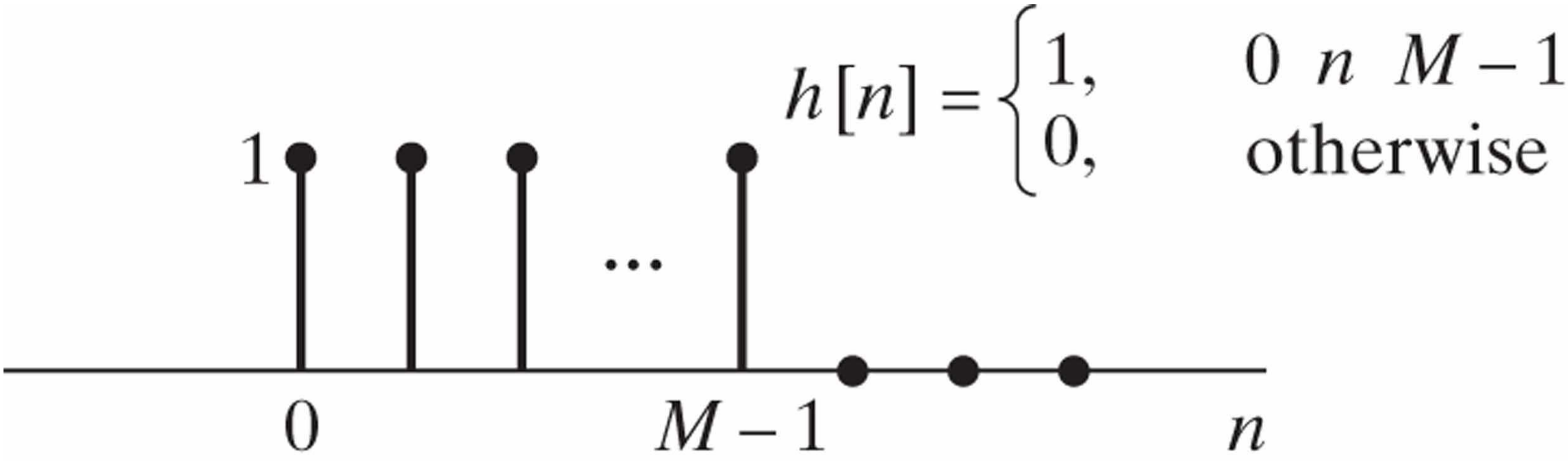


Figure P5.65-3

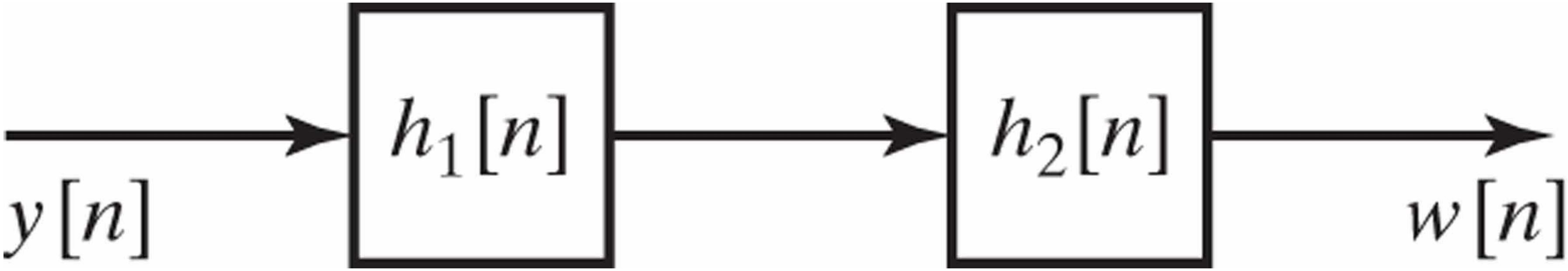
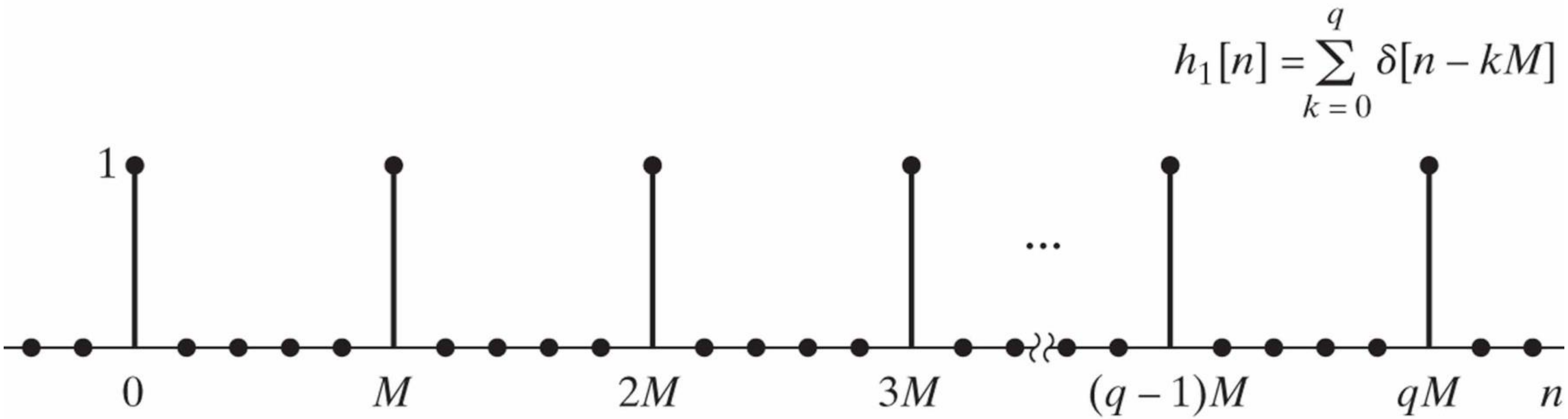


Figure P5.65-4



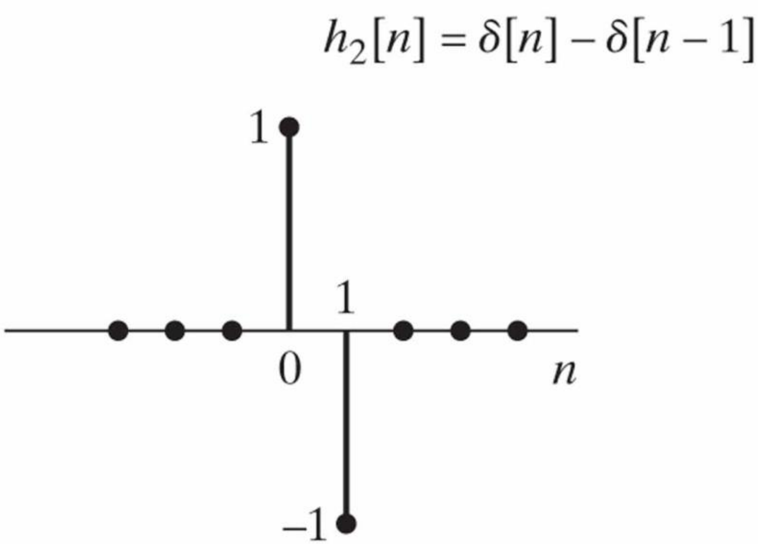


Figure P5.70

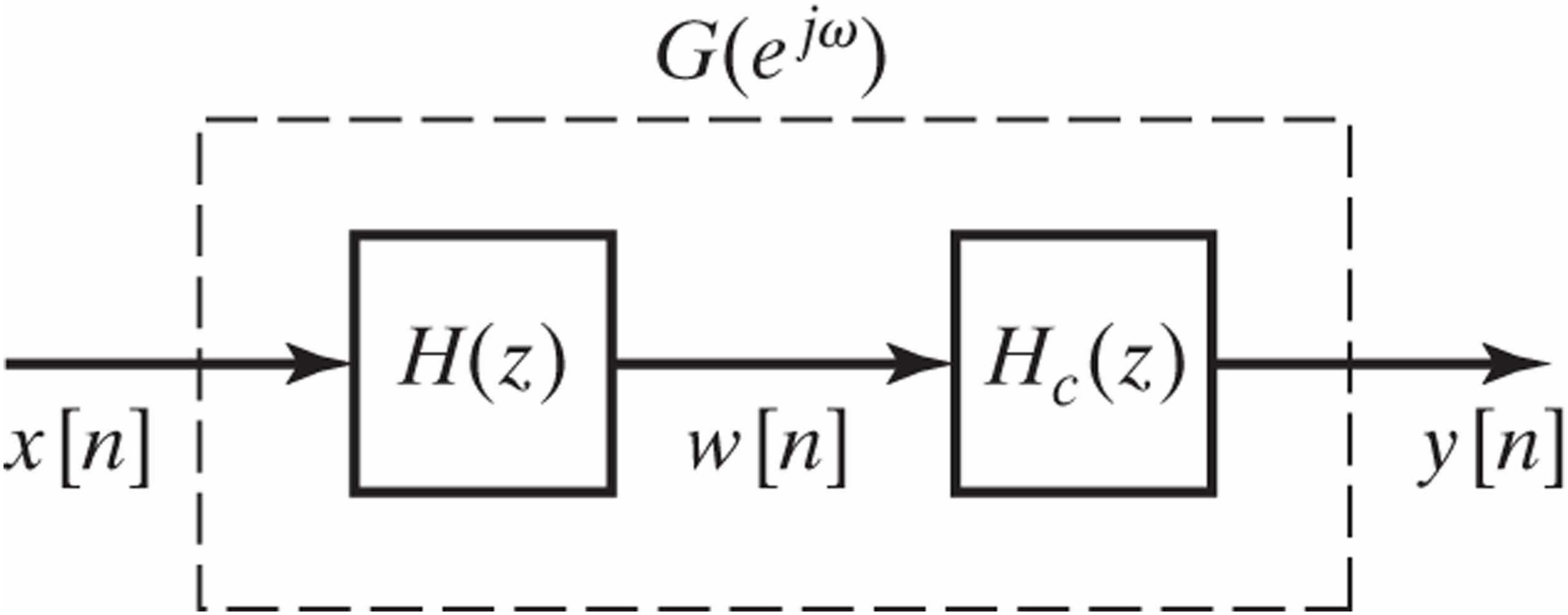
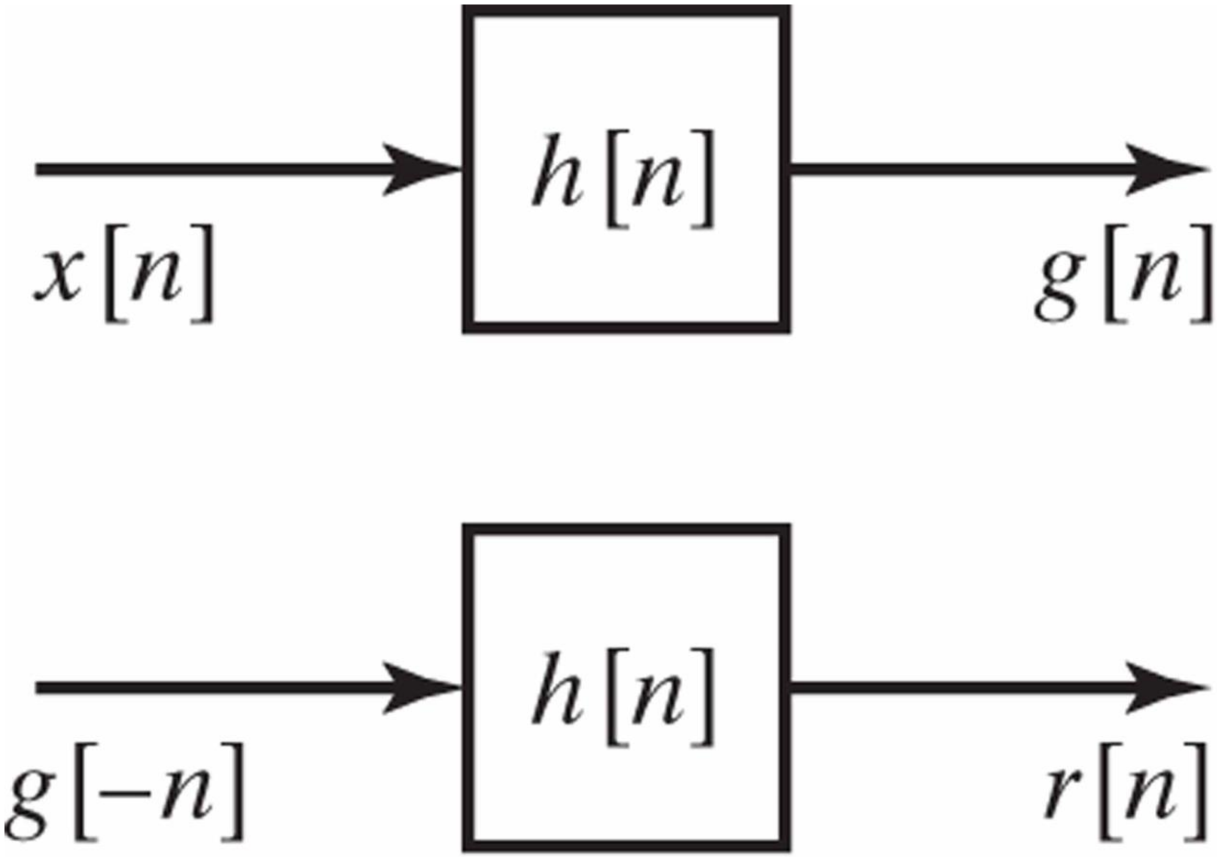
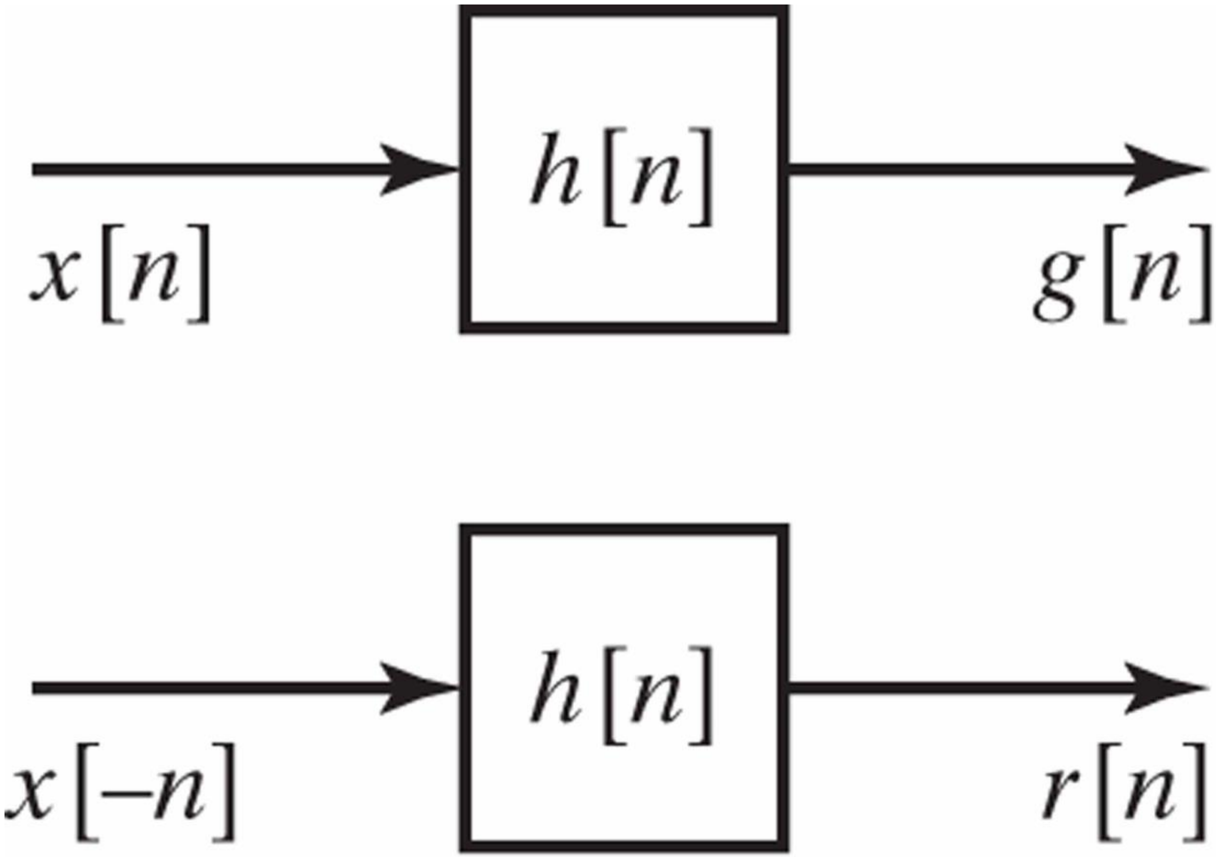


Figure P5.74-1



$$s[n] = r[-n]$$

Figure P5.74-2



$$y[n] = g[n] + r[-n]$$

Figure P5.74-3

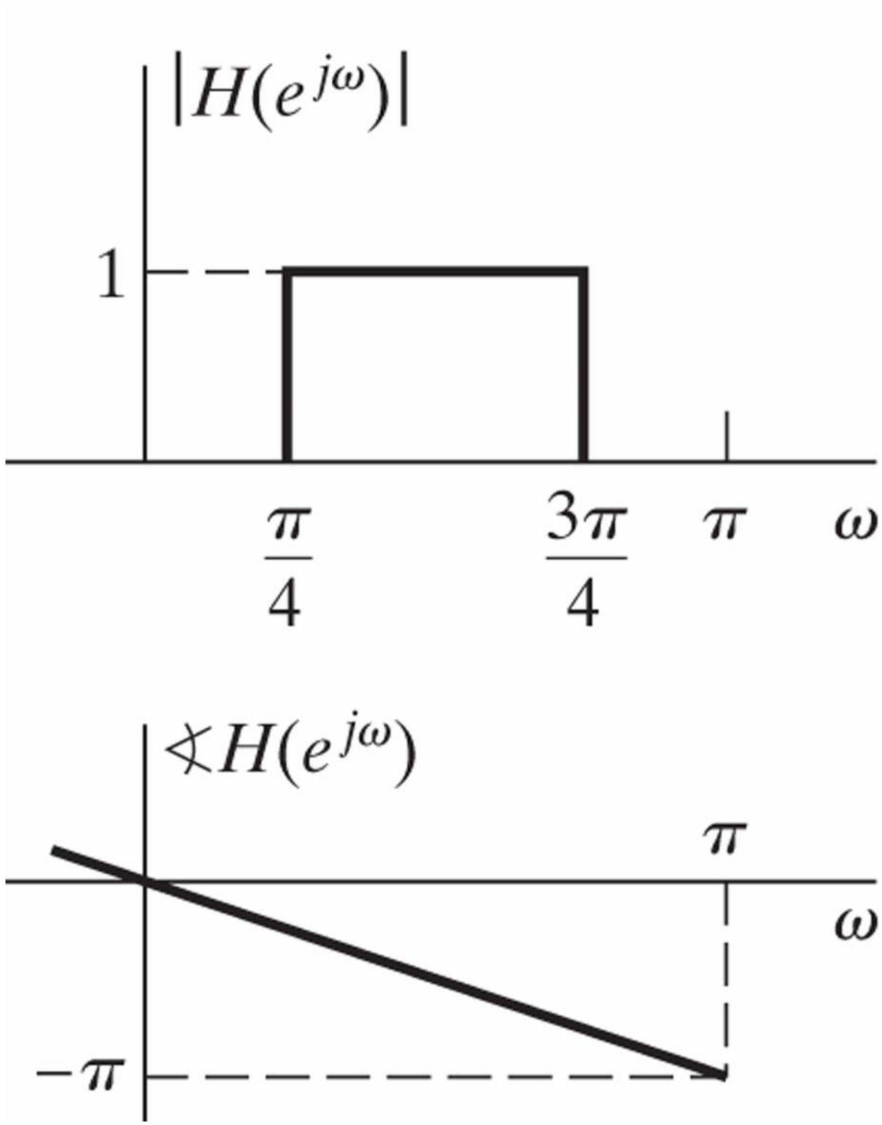


Figure P5.76

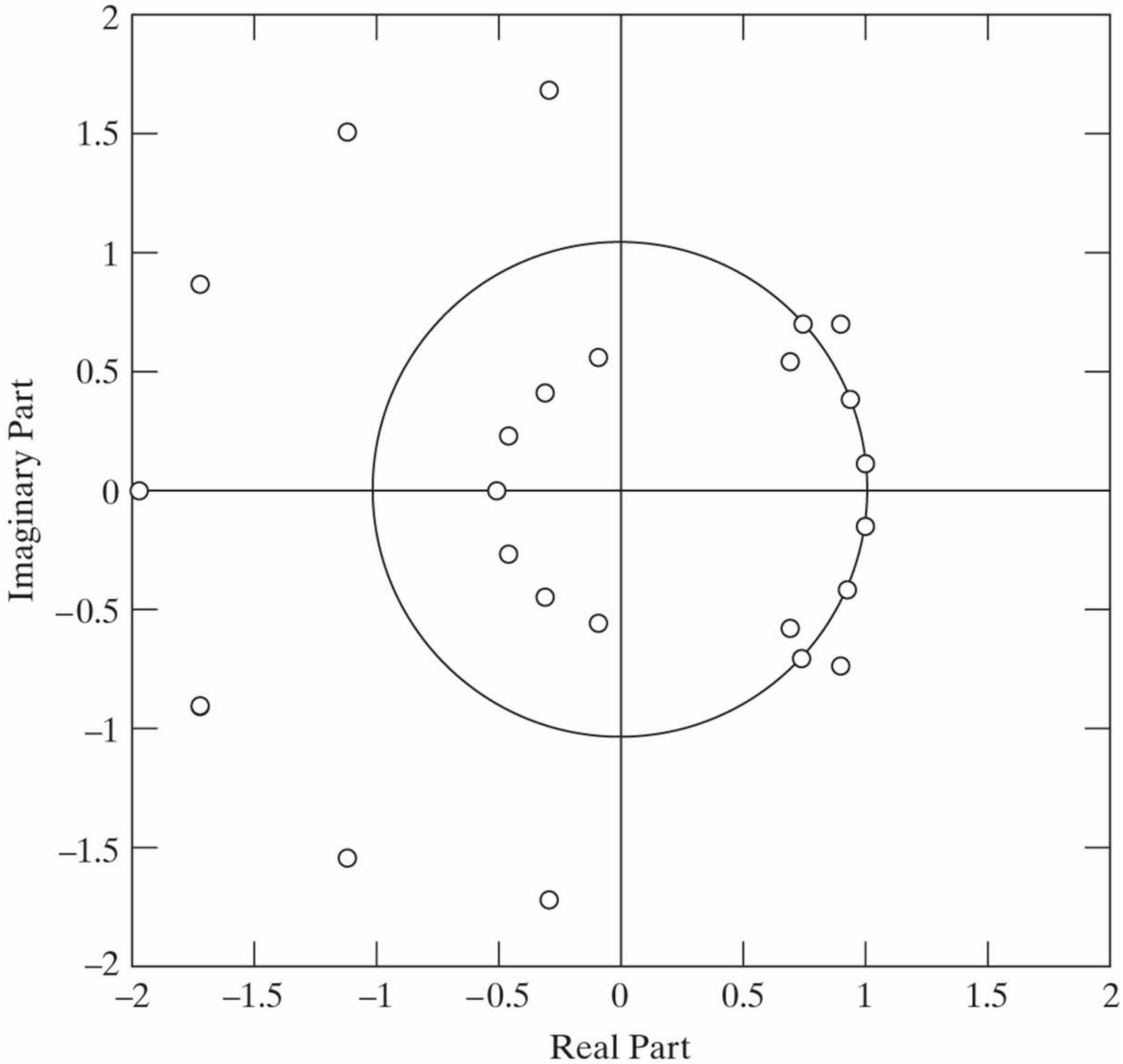


Figure P5.77