فصل ششم: ساختارهای پیاده سازی سیستم های زمان گسسته

Structures for Discrete Time Systems

دو شرط پیاده سازی سیستم به صورت ساده

① LTI و علّی

② $H(z)$ کسری

6.1 نمایش بلوک دیاگرامی معادلات تفاضلی خطی با ضرایب ثابت: LCCDE

Linear Constant Coefficient Difference Equation

- نمادهای بلوک دیاگرامی:

در سیستم های دیجیتال

Adder دو عدد چند بیتی — جمع کننده

$$x_1[n] \rightarrow \overset{x_2[n]}{\downarrow} \oplus \rightarrow x_1[n] + x_2[n]$$

ضرب کننده — ضرب در عدد ثابت

$$x[n] \xrightarrow{a} a\,x[n]$$

Shift Register — تأخیر، حافظه

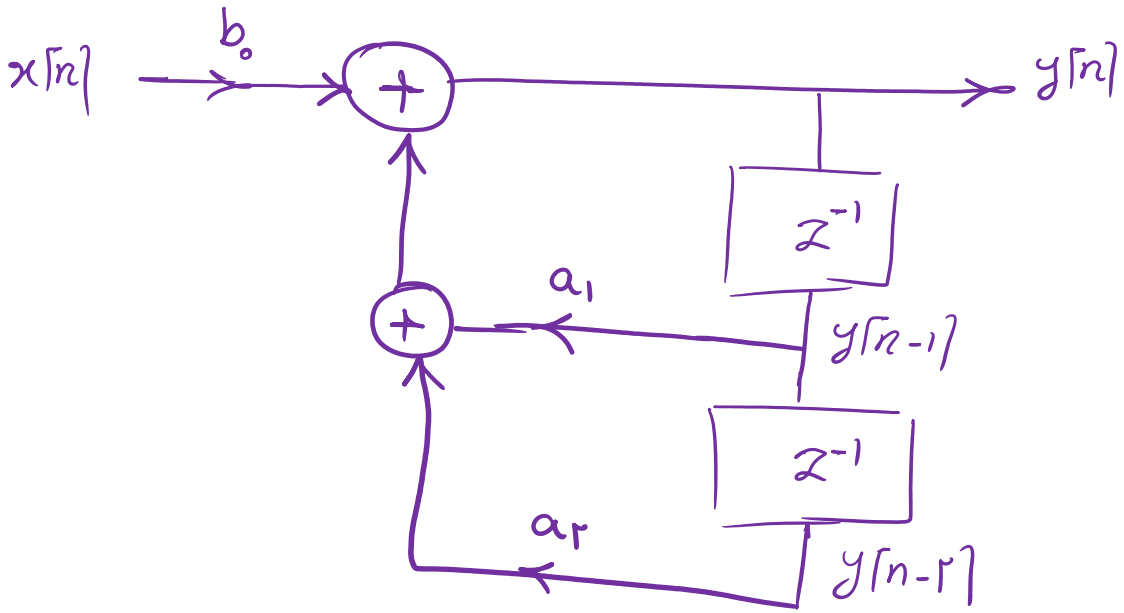
$$x[n] \rightarrow \boxed{z^{-1}} \rightarrow x[n-1]$$

مثال:

از حل غیر سیستمی تنگ

$$\Rightarrow y[n] = a_1 y[n-1] + a_2 y[n-2] + b_0 x[n]$$

$$H(z) = \frac{b_0}{1 - a_1 z^{-1} - a_2 z^{-2}}$$



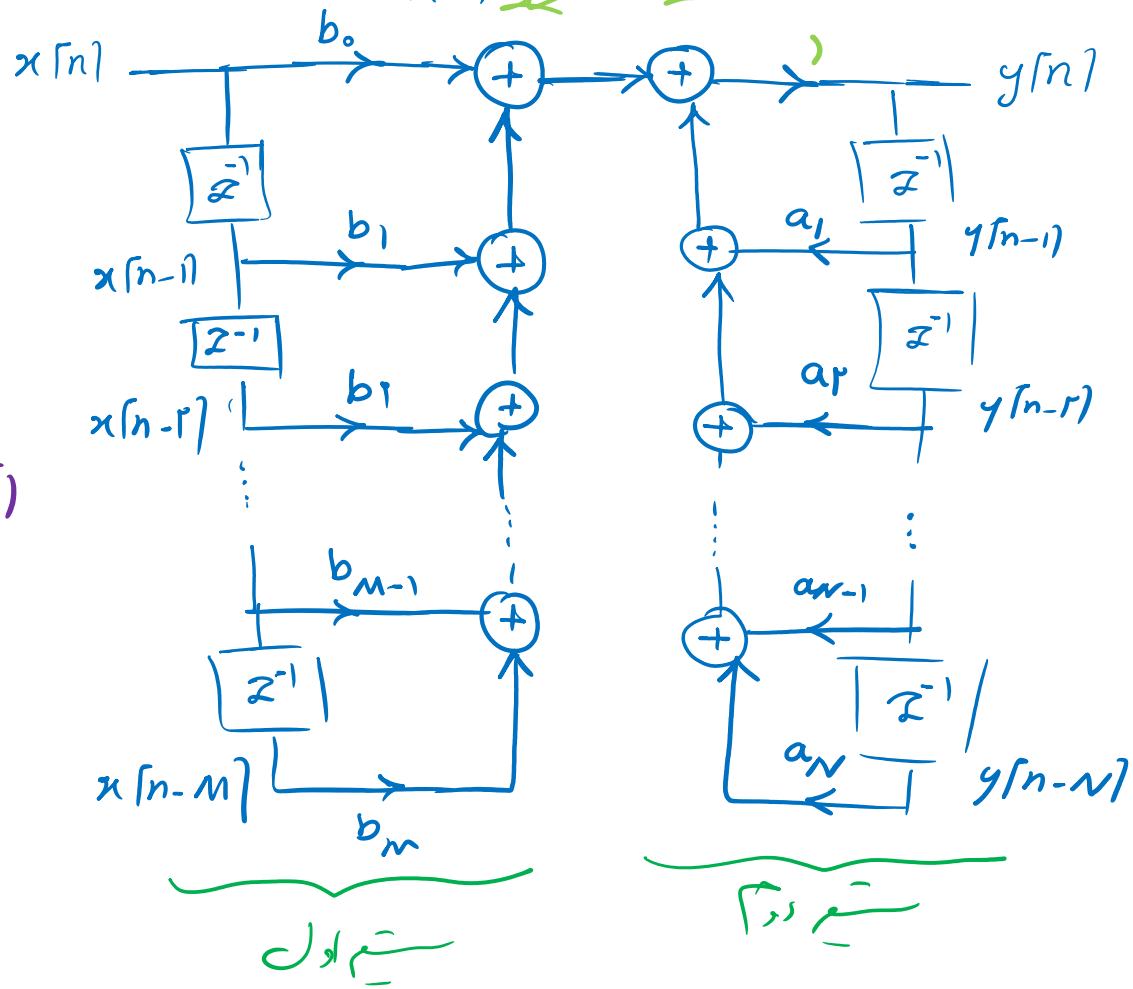
ضریب $y[n]$ برابر ۱ باشد

$$y[n] - \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

$$H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{\text{ضرایب } x\text{ها}}{\text{ضرایب } y\text{ها}} \rightarrow H(z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^{N} a_k z^{-k}}$$

پیاده‌سازی سیستم‌ها:

$$y[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$



Direct Form (I)

ساختار مستقیم (I)

با جابه‌جایی سیستم‌های سری اول و دوم و ادغام بلوک‌های تأخیر به فرم مستقیم (II) می‌رسیم.

Direct Form (I)

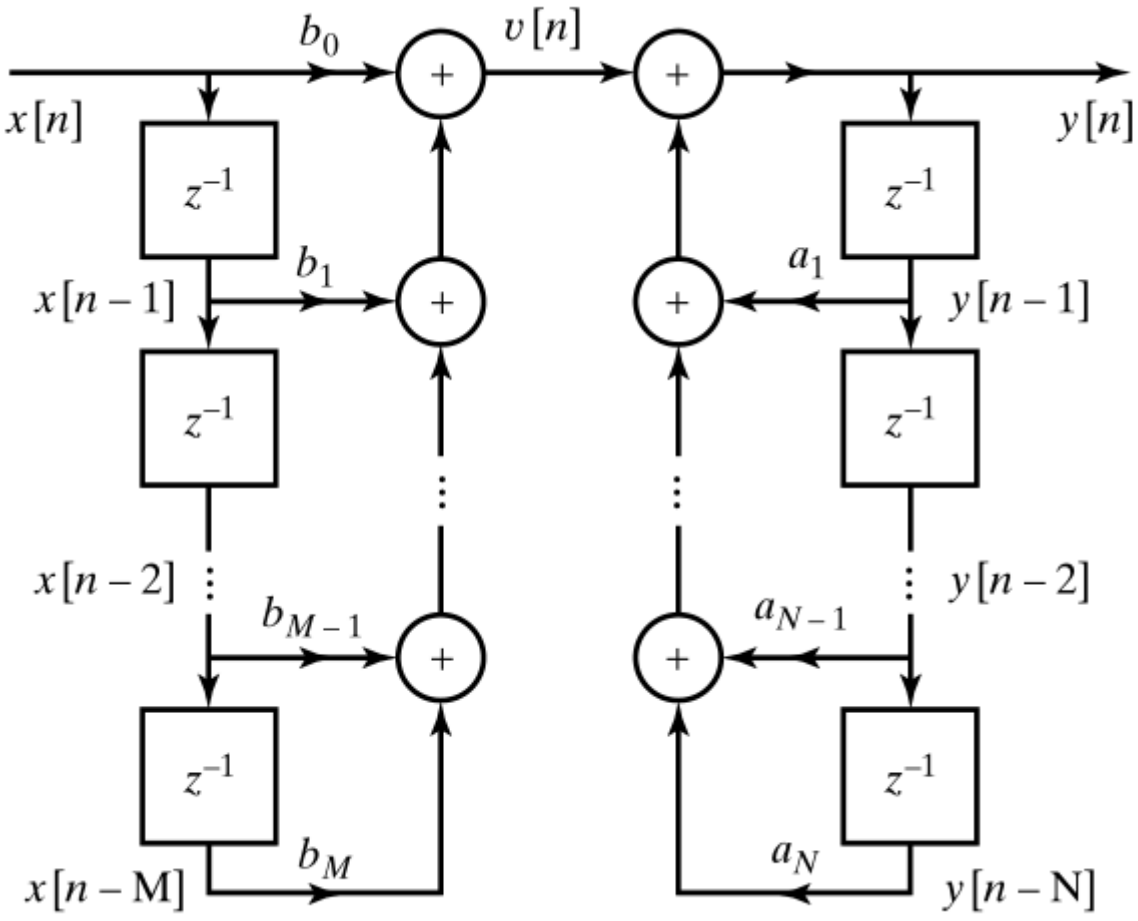


Figure 3 Block diagram representation for a general N^{th}-order difference equation.

Reversed of Direct Form (I)

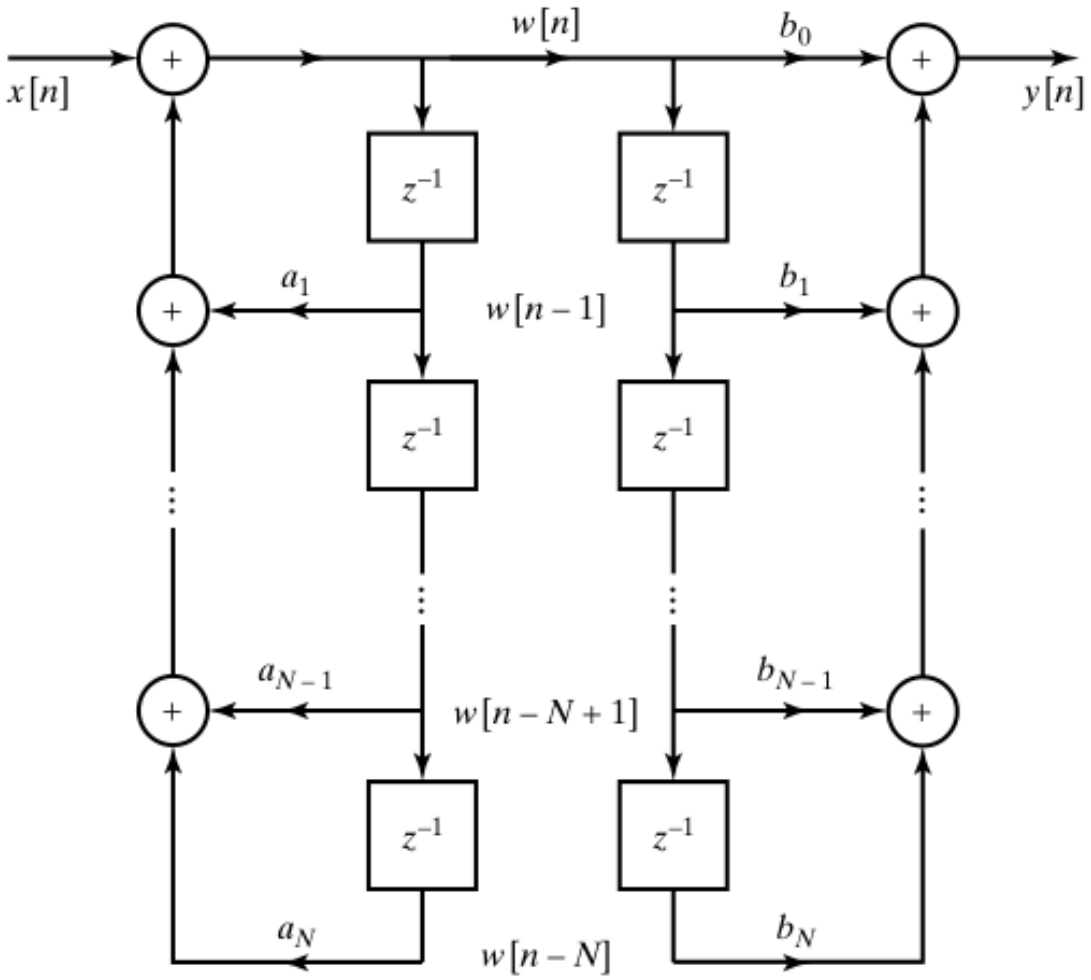


Figure 4 Rearrangement of block diagram of Figure 3. We assume for convenience that $N = M$. If $N \neq M$, some of the coefficients will be zero.

Direct Form (II)

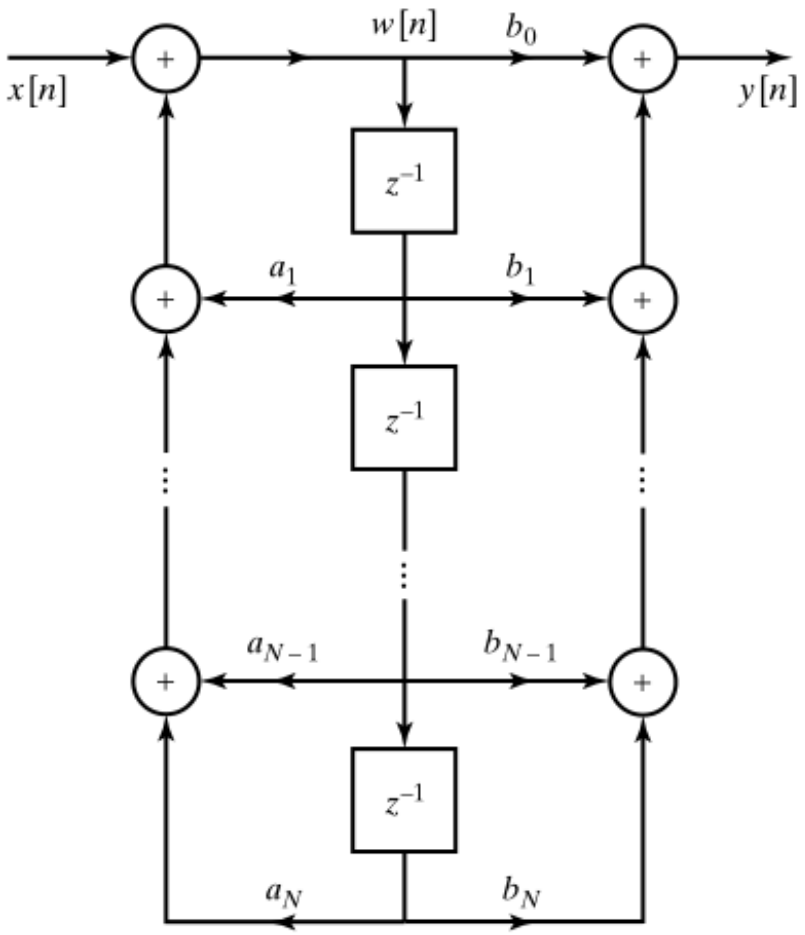


Figure 5 Combination of delays in Figure 4.

فرم‌های پیاده‌سازی Direct (I) و Direct (II) از نظر تئوری کاملاً معادل‌اند.

از نظر عملی هزینهٔ پیاده‌سازی فرم Direct (II) به دلیل تعداد عناصر حافظه‌ای کمتر، کمتر است.

فرم Direct (I) ابتدا صفرها و سپس قطب‌ها را اعمال می‌کند.

فرم (II) ابتدا قطب‌ها و سپس صفرها را اعمال می‌کند.

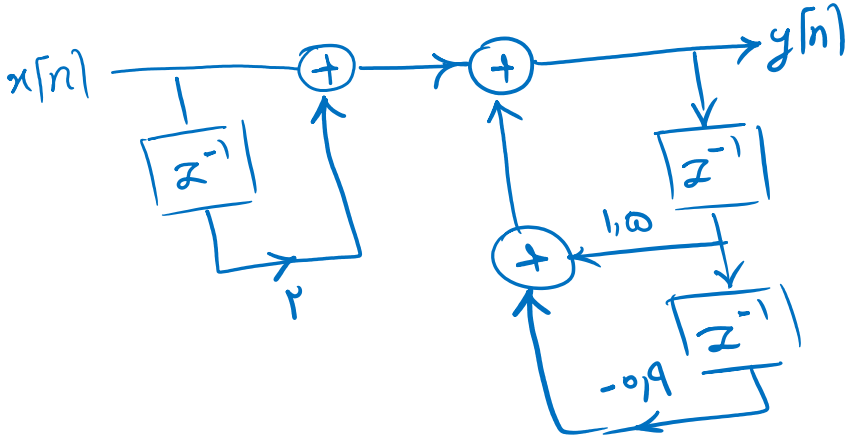
مثال:

$$H(z) = \frac{1+2z^{-1}}{1-(1.5z^{-1}-0.9z^{-2})}$$

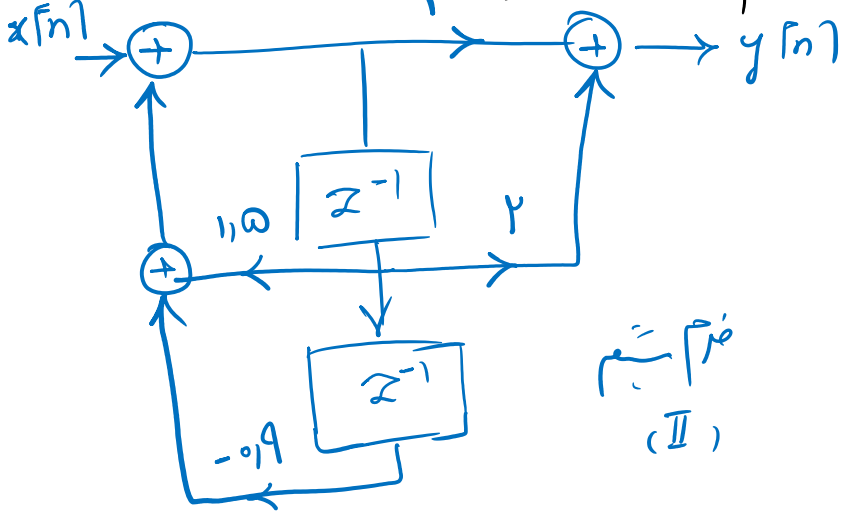
$$\begin{cases} b_0 = 1 \\ b_1 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 = 1.5 \\ a_2 = -0.9 \end{cases}$$

فرم مستقیم (I)



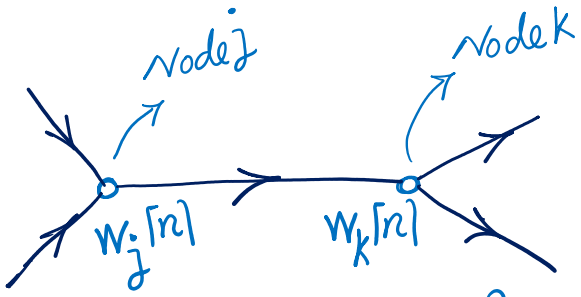
پیاده‌سازی به فرم مستقیم (I) و (II)



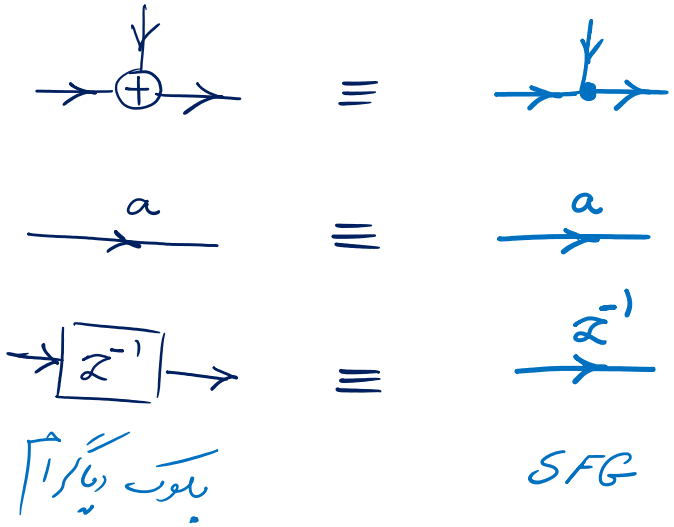
فرم مستقیم (II)

بیان Signal Flow Graph (SFG) برای LCCDE :

SFG از تعدادی گره (Node) و شاخه‌های جهت‌دار تشکیل شده است.



$w_j[n]$: سیگنال در گره j ام

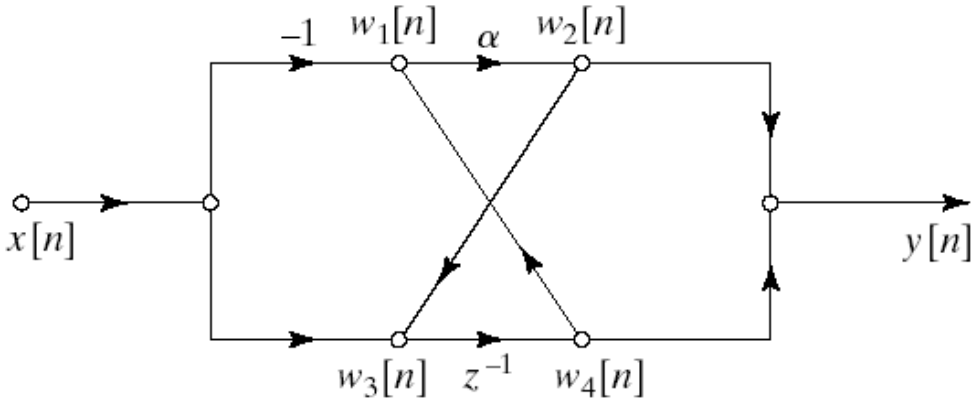


بلوک دیاگرام

SFG

رابطهٔ هر یک از گره‌ها از روی شاخه‌های ورودی به آن گره مشخص می‌شود.

مثال: تابع سیستم را به دست آورید:



در حوزهٔ Z

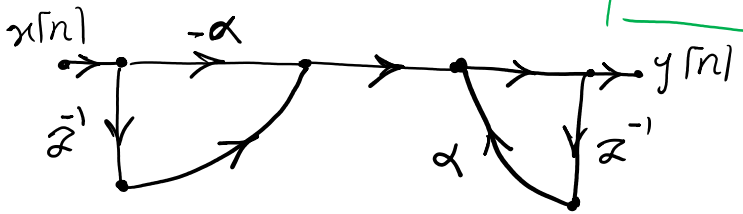
$$W_1(Z) = W_4(Z) - X(Z)$$
$$W_2(Z) = \alpha W_1(Z) \rightarrow W_2(Z) = \alpha\left(W_4(Z) - X(Z)\right)$$
$$W_3(Z) = W_2(Z) + X(Z)$$
$$W_4(Z) = Z^{-1} W_3(Z) \rightarrow W_4(Z) = Z^{-1}\left(W_2(Z) + X(Z)\right)$$
$$Y(Z) = W_2(Z) + W_4(Z)$$

$$\begin{cases} W_2(Z) = \dfrac{\alpha(Z^{-1} - 1)}{1 - \alpha Z^{-1}} X(Z) \\[2ex] W_4(Z) = \dfrac{Z^{-1}(1-\alpha)}{1 - \alpha Z^{-1}} X(Z) \end{cases}$$

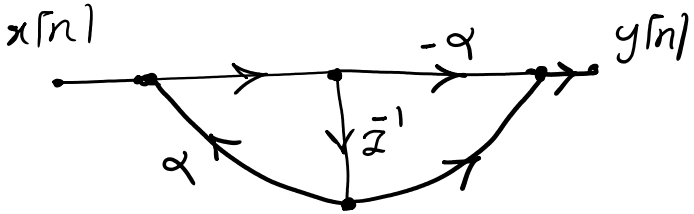
$$Y(Z) = \left(\frac{\alpha(Z^{-1} - 1) + Z^{-1}(1-\alpha)}{1 - \alpha Z^{-1}}\right) X(Z)$$

$$\Rightarrow Y(Z) = \frac{Z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha Z^{-1}} X(Z) \Rightarrow \boxed{H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = \frac{Z^{-1} - \alpha}{1 - \alpha Z^{-1}}} \rightarrow h[n] = \alpha^{n-1} u[n-1] - \alpha^{n+1} u[n]$$

Direct I پیاده سازی به صورت



Direct II پیاده سازی:



6.3 : ساختارهای پایه برای سیستم‌های IIR :

تابع تبدیل $H(Z)$ کسری

$$H(Z) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k Z^{-k}}{1 - \sum_{k=1}^{N} a_k Z^{-k}}$$

برای FIR : همهٔ a_k ها صفر هستند ، $H(Z)$ چندجمله‌ای

کتاب Fig 14,15

6.3.1 : فرم‌های مستقیم Direct Forms : فرم‌های (I) و (II)

به‌طور مستقیم و بدون پردازش از روی $H(Z)$ قابل پیاده‌سازی اند.

6.3.2 : فرم آبشاری Cascade Form :

subsystem

رابطهٔ برای زیرسیستم‌های مرتبهٔ دوم :

$$H(Z) = \prod_{k=1}^{N_s} \frac{b_{0k} + b_{1k} Z^{-1} + b_{2k} Z^{-2}}{1 - a_{1k} Z^{-1} - a_{2k} Z^{-2}}$$

رابطه کلی در کتاب (29)

چگونگی پیاده سازی به فرم آبشاری از روی صفر و قطبها :

۱- $H(Z)$ را به صفرها و قطبها تجزیه می‌کنیم

۲- pair (جفت) کردن صفرها دوتا دوتا و قطبها دوتا دوتا

۳- با دو قطب و دو صفر یک کسر (subsystem) را می‌سازیم.

مثال :

شرط حقیقی : صفرها و قطبهای انتخاب شده تقارن حول کو افقی
complex conjugate

درجه آزادی برای پیاده سازی
cascade :

۱- جفت کردن صفر و قطبها

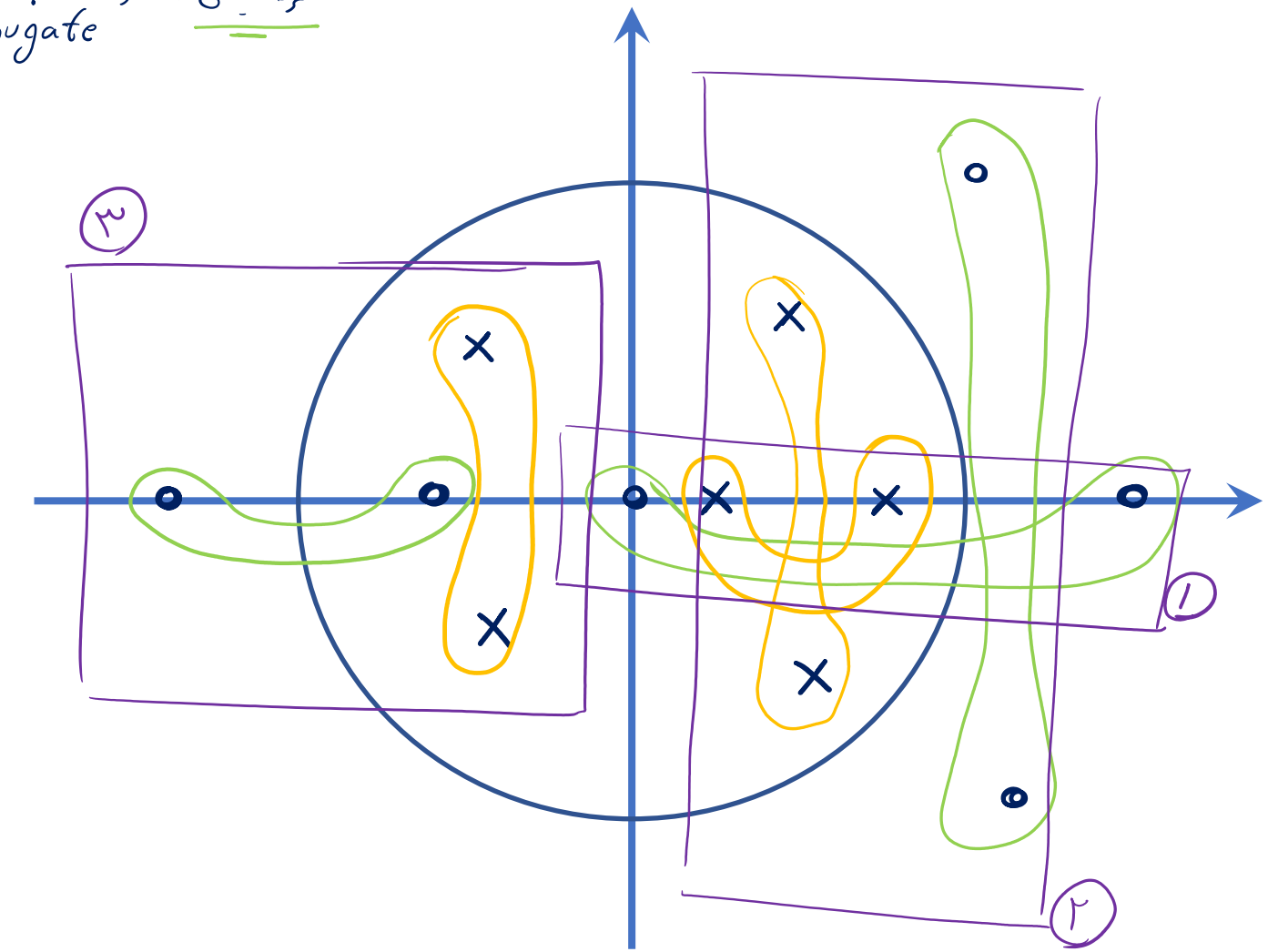
۲- ساختن زیرسیستم ها

۳- ترتیب زیرسیستم ها : ۱ ۲ ۳ / ۳ ۲ ۱ / ۱ ۳ ۲

۴- ساختار پیاده سازی زیرسیستم ها

Direct I , II

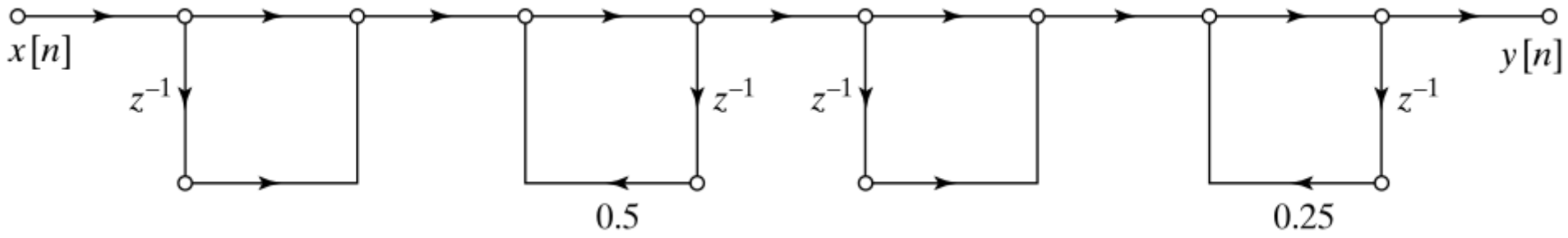
و ساختارهای گرانهاده شان

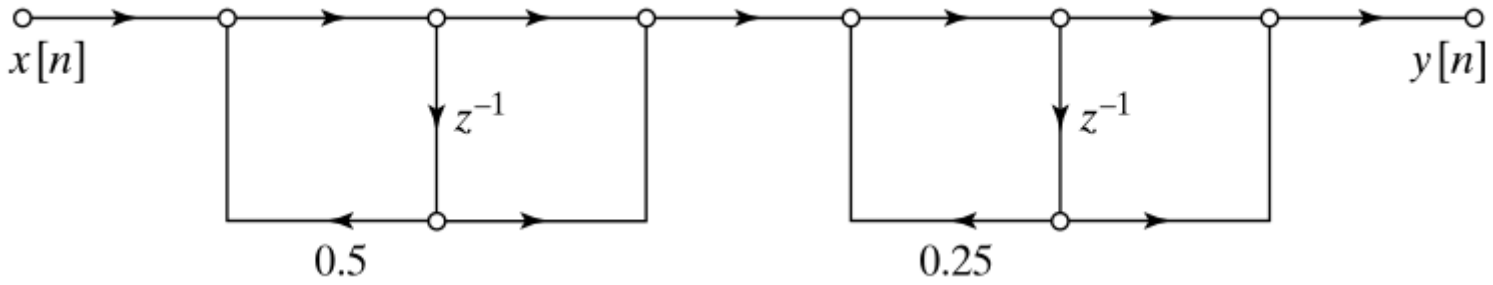


مثال: پیاده سازی آبشاری

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0.75z^{-1} + 0.125z^{-2}}.$$

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0.75z^{-1} + 0.125z^{-2}} = \frac{(1 + z^{-1})(1 + z^{-1})}{(1 - 0.5z^{-1})(1 - 0.25z^{-1})}.$$





6.3.3 فرم موازی : Parallel

$$H(z)=\sum_{k=1}^{N_s}\frac{e_{0k}+e_{1k}z^{-1}}{1-a_{1k}z^{-1}-a_{2k}z^{-2}}$$

تجزیه به کسرهای جزئی

در ساختن فرم موازی، انتخابی روی صفرها نداریم.

به عبارت دیگر، صفرهای زیرسیستم‌های فرم موازی با صفرهای سیستم اصلی برابر هستند.

- پیاده‌سازی به فرم موازی: ۱- تجزیه به کسرهای جزئی

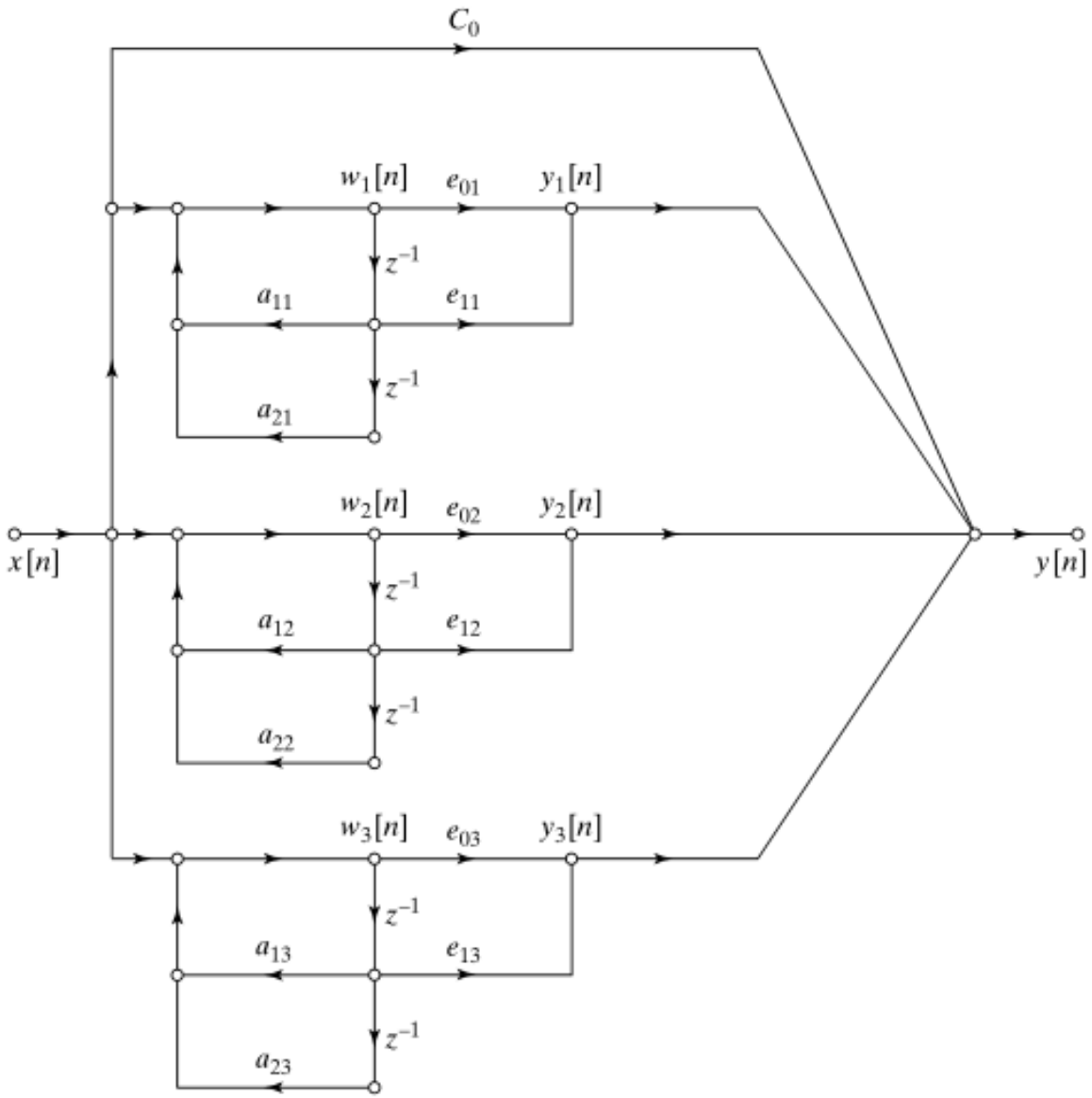
۲- جفت کردن قطبها برای ساختن زیرسیستم‌ها

$$H(z)=\sum_{k=0}^{N_p}C_kz^{-k}+\sum_{k=1}^{N_1}\frac{A_k}{1-c_kz^{-1}}+\sum_{k=1}^{N_2}\frac{B_k(1-e_kz^{-1})}{(1-d_kz^{-1})(1-d_k^*z^{-1})},$$

$$H(z)=\sum_{k=0}^{N_p}C_kz^{-k}+\sum_{k=1}^{N_s}\frac{e_{0k}+e_{1k}z^{-1}}{1-a_{1k}z^{-1}-a_{2k}z^{-2}},$$

M=N=6

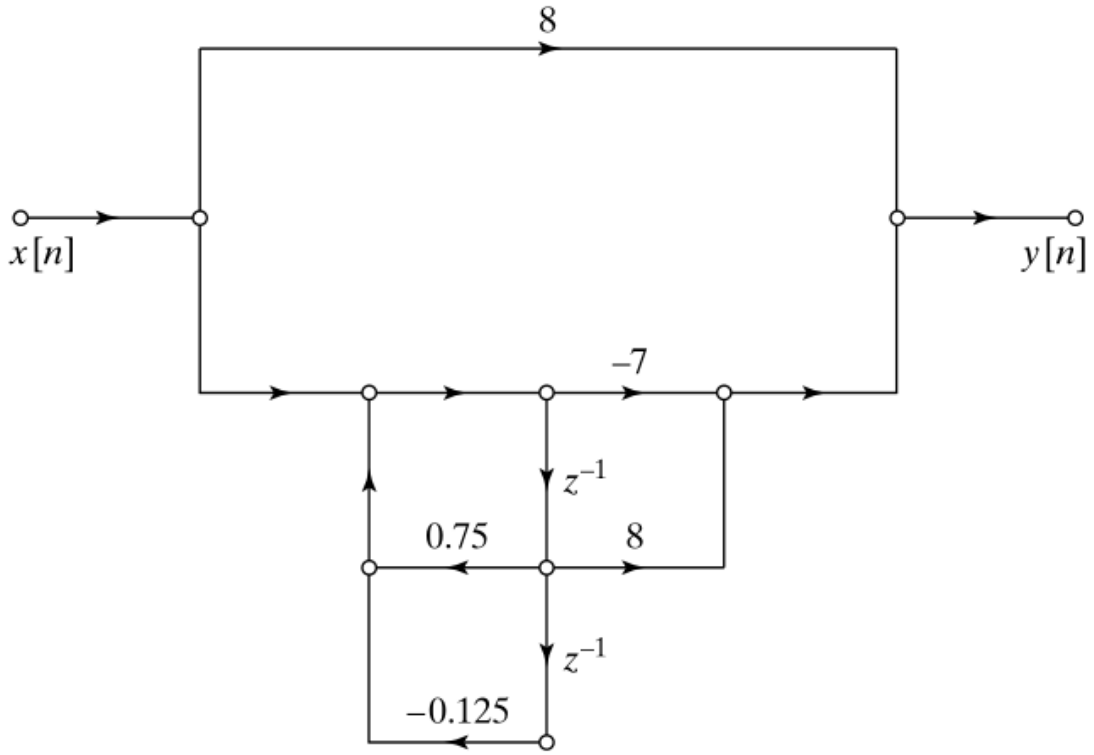
$$H(z) = \sum_{k=0}^{N_p} C_k z^{-k} + \sum_{k=1}^{N_s} \frac{e_{0k} + e_{1k} z^{-1}}{1 - a_{1k} z^{-1} - a_{2k} z^{-2}},$$



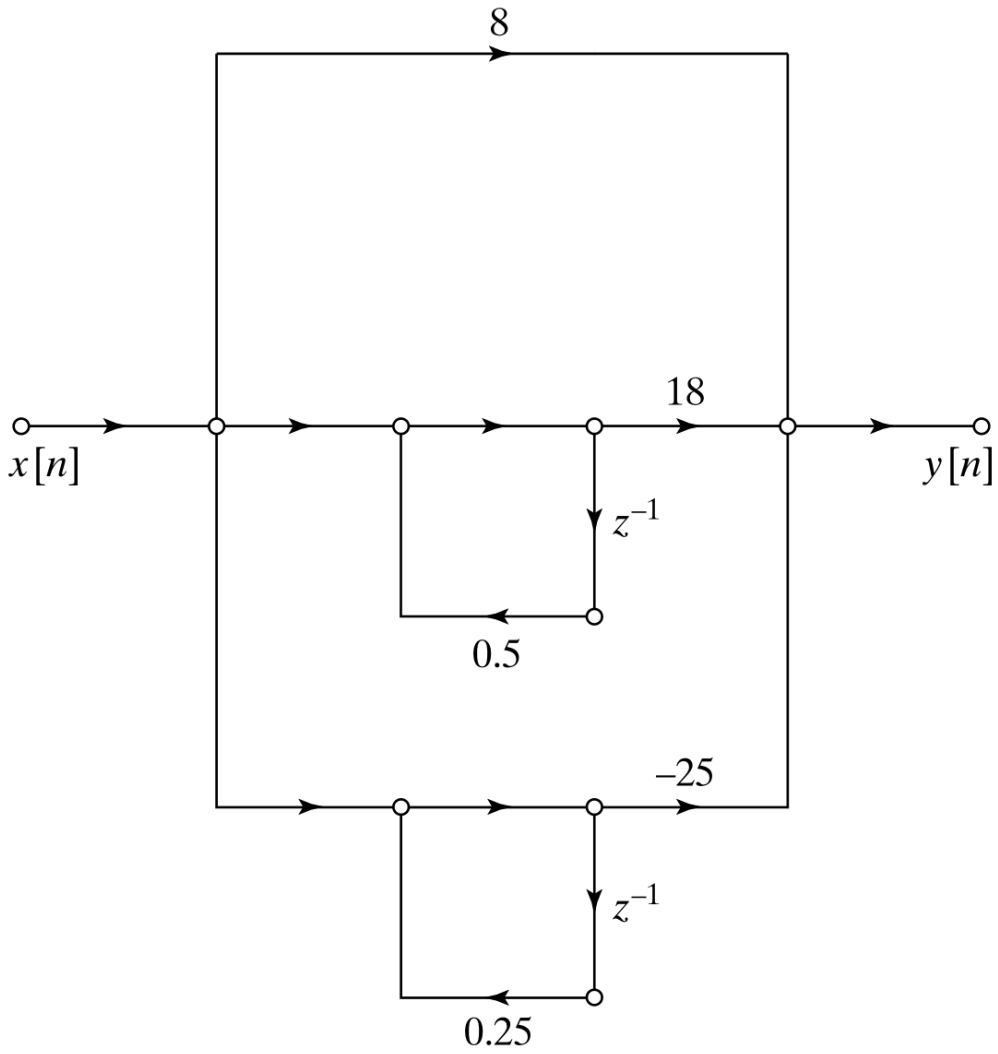
مثال: پیاده سازی به فرم موازی

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0.75z^{-1} + 0.125z^{-2}}$$

$$H(z) = \frac{1 + 2z^{-1} + z^{-2}}{1 - 0.75z^{-1} + 0.125z^{-2}} = 8 + \frac{-7 + 8z^{-1}}{1 - 0.75z^{-1} + 0.125z^{-2}}.$$



$$H(z) = 8 + \frac{18}{1 - 0.5z^{-1}} - \frac{25}{1 - 0.25z^{-1}}.$$



6.4 فرم‌های ترانهاده Transposed Forms:

قضیه Transposition ⇐ اگر بدون تغییر روی بهرهٔ شاخه‌های یک SFG، جهت همهٔ شاخه‌ها Reverse (وارون) شوند و جای $x[n]$ و $y[n]$ عوض شوند، $H(z)$ تغییری نمی‌کند.

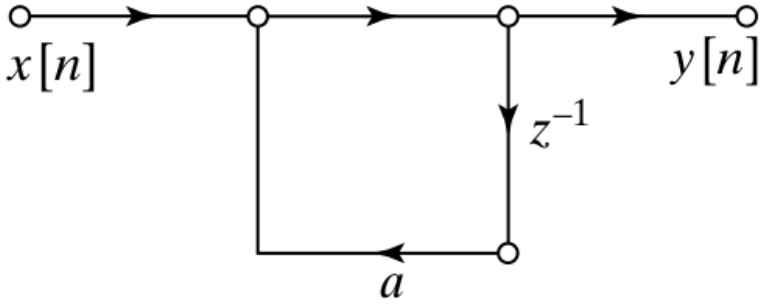
جابه‌جایی $x[n]$ و $y[n]$

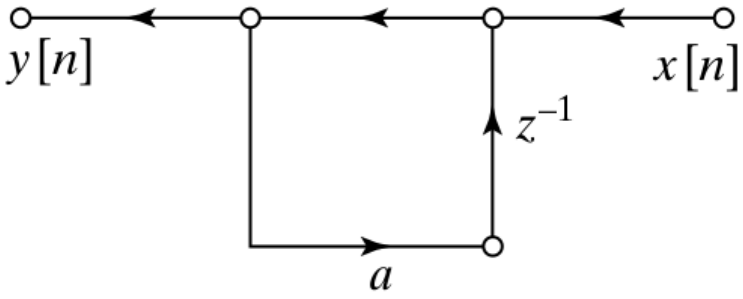
چرخاندن کل SFG

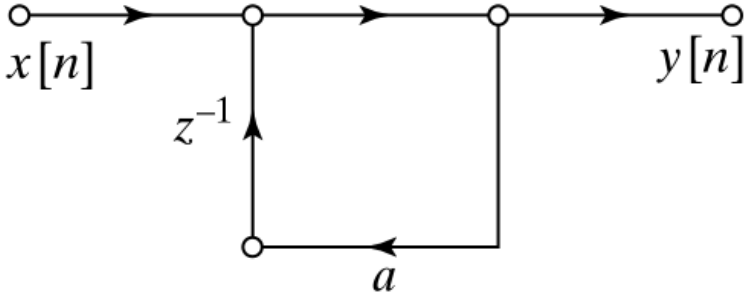
ساختارهای ترانهاده از نظر اعمال صفر و قطب‌ها با ساختار اصلی متفاوت‌اند.

- مثال:

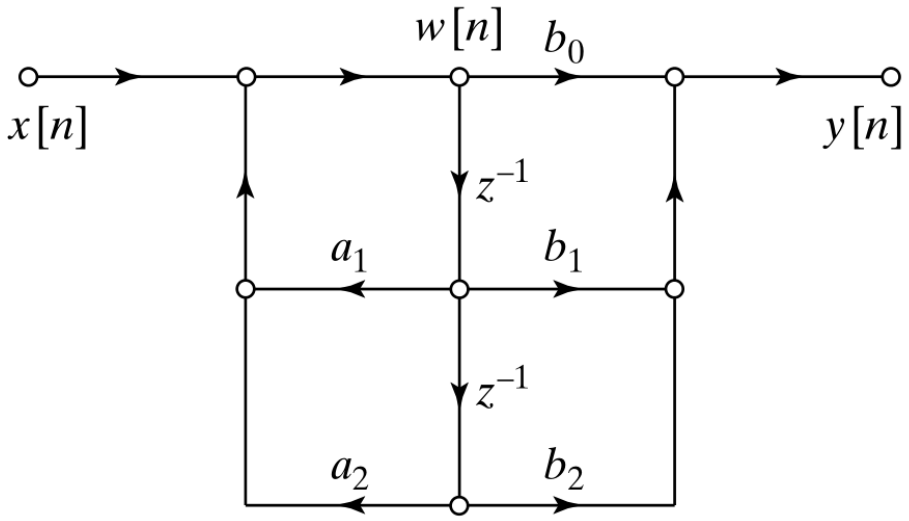
$$H(z) = \frac{1}{1 - az^{-1}}.$$

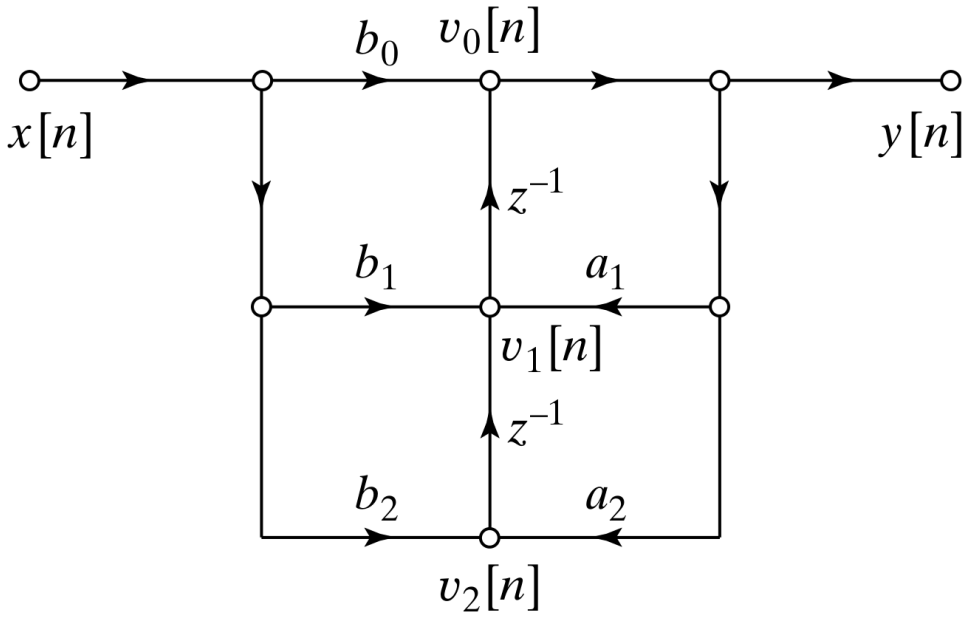




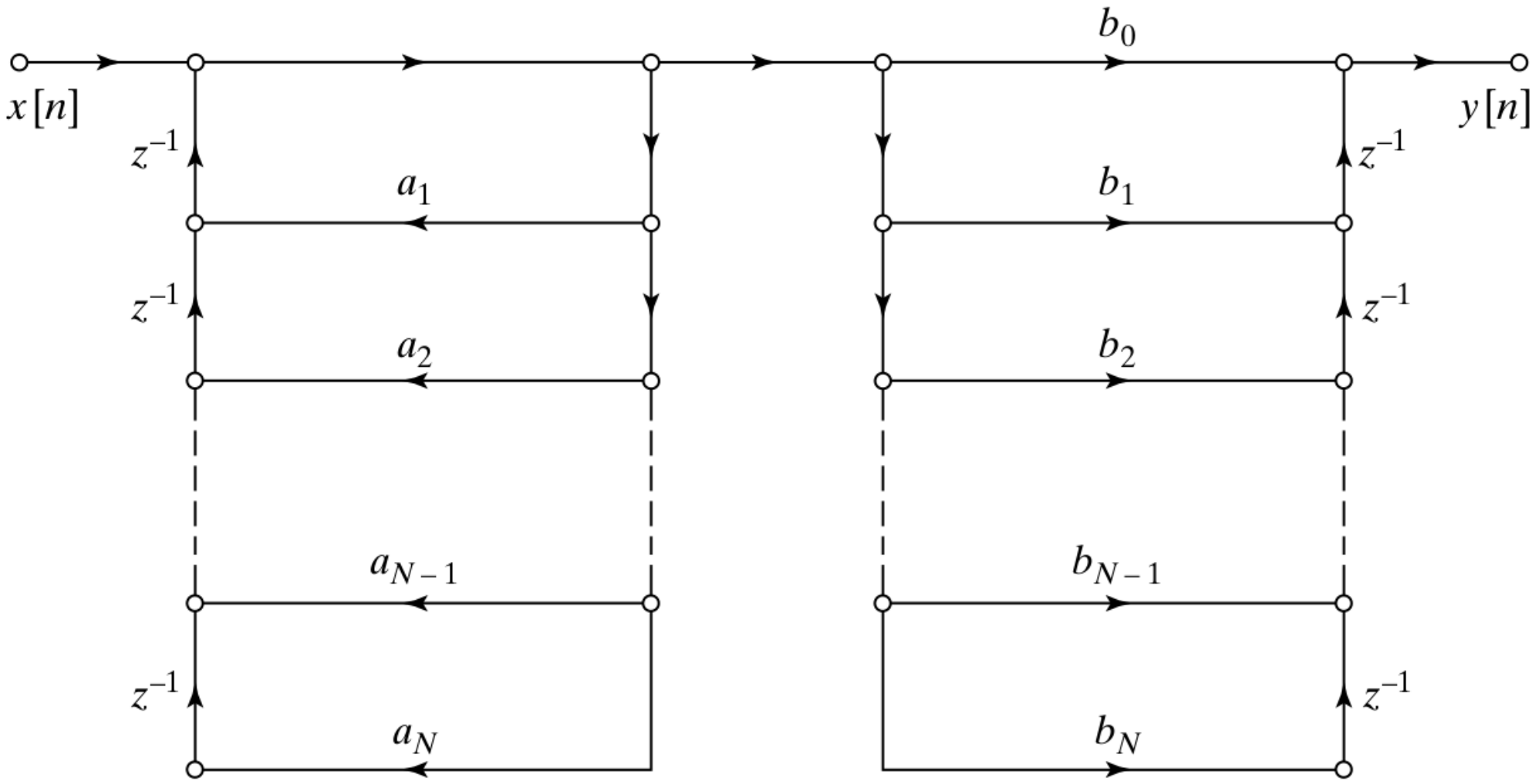


مثال:

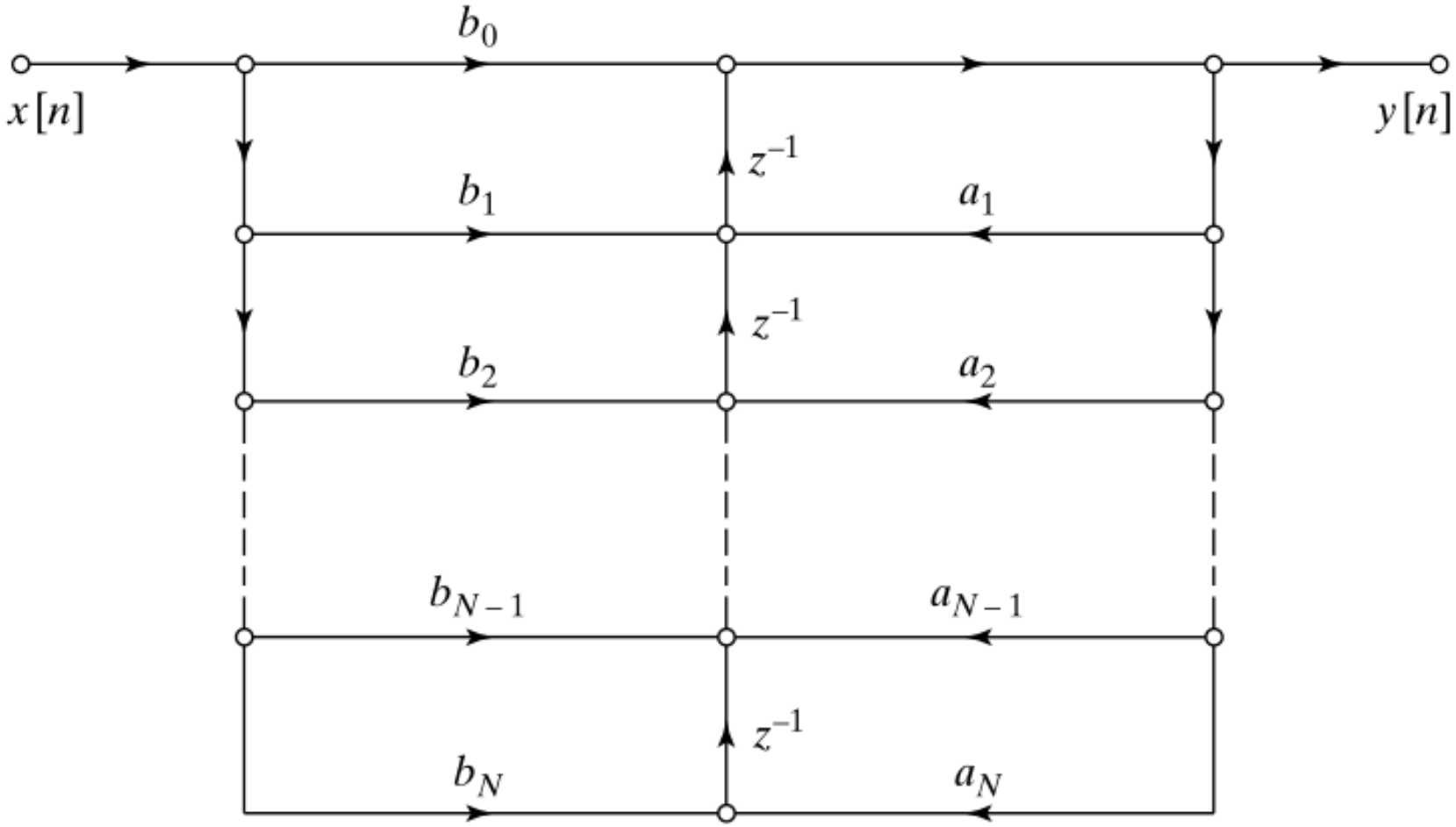




فرم مستقیم (I) ترانهاده



فرم مستقیم (II) ترانهاده



6.5 : ساختارهای پایه برای سیستم‌های FIR :

IIR:

$$H(z)=\frac{\sum b_k z^{-k}}{1-\sum a_k z^{-k}} \xrightarrow{\text{به } a_k=0} H(z)=\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k} \quad : FIR$$

چندجمله‌ای نه کسری

ساختاری که حلقه (فیدبک) ندارد.

فقط صفر دارد. بدون قطب (قطب‌ها در صفر)

۱- سیستم‌های FIR تنها یک فرم Direct دارند (زیرا قطب ندارد)

پیاده‌سازی مستقیم از روی کانولوشن

۲- پیاده‌سازی فرم مولتی برای سیستم‌های FIR نداریم. زیرا قطب و کسری برای تجزیه وجود ندارد.

بتبدیل Z
پاسخ ضربه

$$H(z)=\sum_{k=0}^{M} h[k]\, z^{-k}$$

① فرم مستقیم Direct

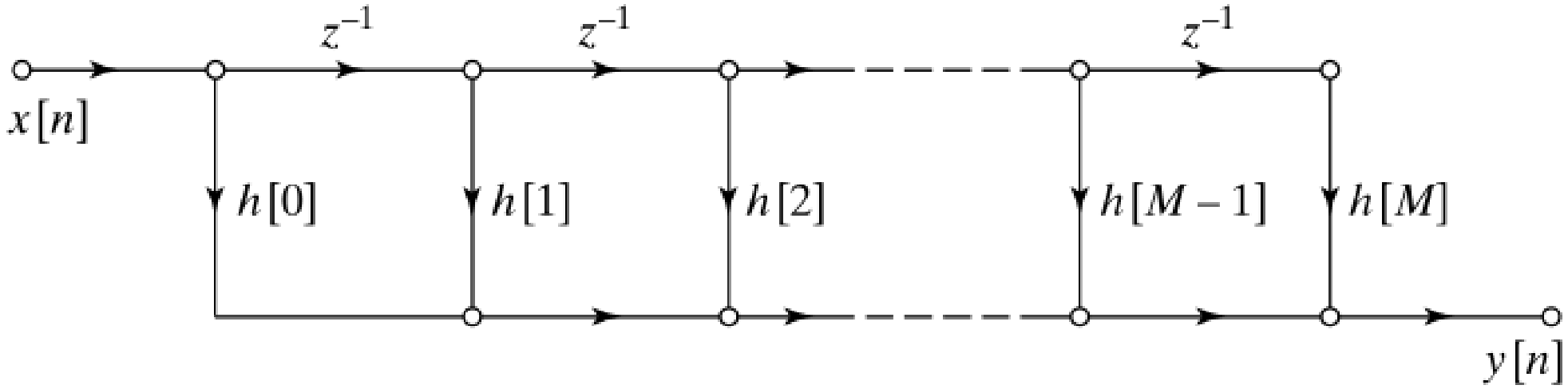
② فرم Cascade :

$$H(z)=\sum_{k=0}^{M} b_k z^{-k}=\prod_{k=1}^{M_s}\left(b_{0k}+b_{1k}z^{-1}+b_{2k}z^{-2}\right)$$

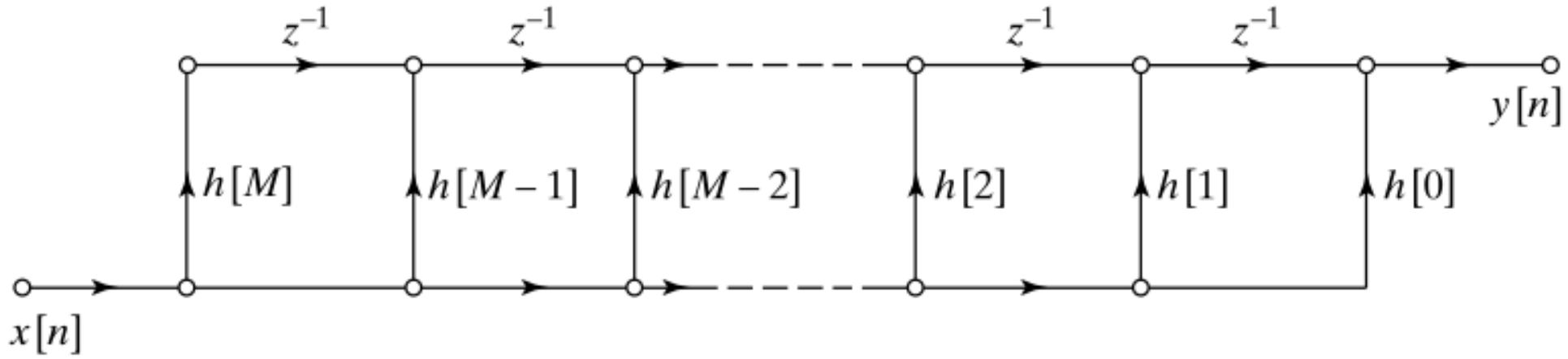
و ترانهاده‌های آنها

فرم مستقیم:

$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k].$$



- فرم مستقیم ترانهاده



فرم سری آبشاری:

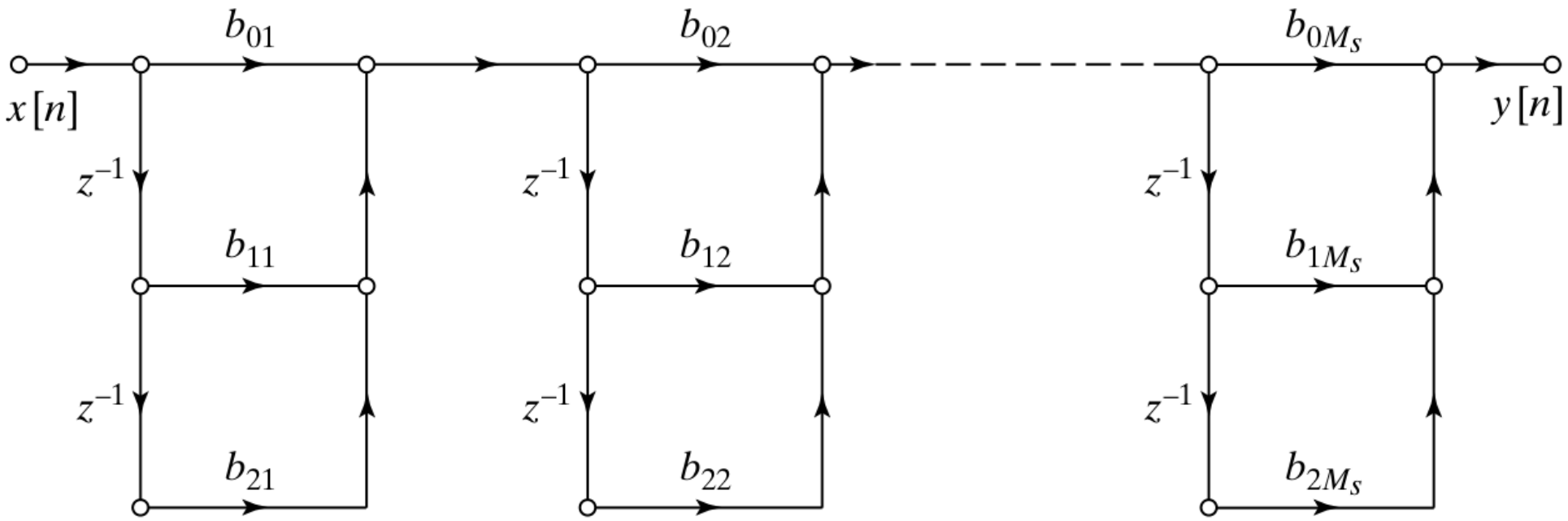


Figure 31 Cascade form realization of an FIR system.

سیستم‌های با فاز خطی تعمیم یافته : FIR با پاسخ ضربه متقارن

$$h[M-n] = \pm h[n]$$

با درنظرگرفتن این شرط پیاده سازی این سیستم‌ها با تقریباً نصف تعداد ضرب کننده‌ها انجام پذیر است.

$$x[n]h[0] + x[n-M]h[M] = (x[n] \pm x[n-M])h[0]$$

M زوج : $\frac{M}{2}$

M فرد : $\frac{M-1}{2}$

$$h[M-n] = \pm h[n] \xrightarrow{n=0} h[M] = \pm h[0]$$

ساده سازی در
پیاده سازی سیستم های
با فاز خطی تعمیم یافته:

M زوج:

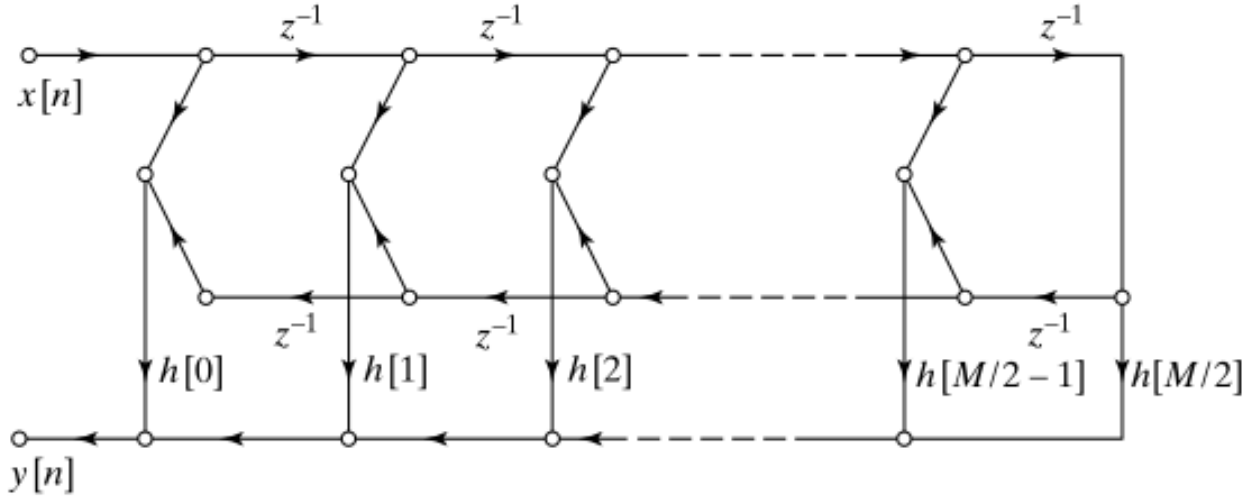


Figure 32 Direct form structure for an FIR linear-phase system when M is an even integer.

M فرد:

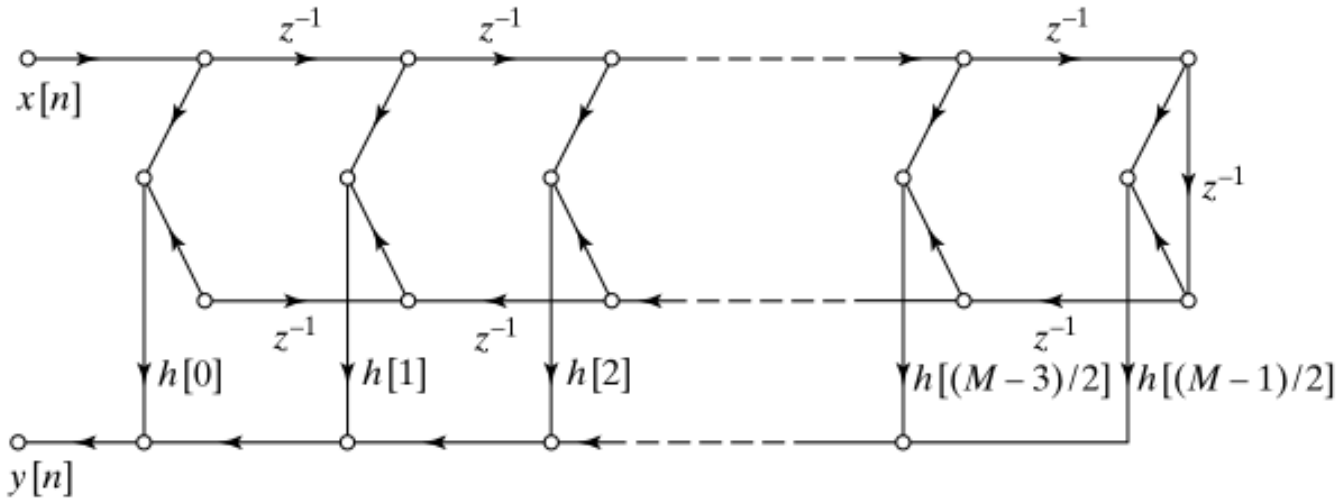


Figure 33 Direct form structure for an FIR linear-phase system when M is an odd integer.

اثرات محاسبات عددی با دقت محدود (متناهی)

Finite Percision

6.7

دلیل انتخاب ساختارهای مختلف :

۱- هزینه پیاده سازی

۲- ماژولاریتی

۳- دقت متناهی Finite Percision

پیاده سازی یک DSP : B (تعداد بیتهای متناهی)

اثرات محدود بودن تعداد بیت B :

۱- تمام ضرایب DSP ها باید به طول B+1 بیت بیان شوند. مثال : $\frac{1}{3}$ به طول بیت بی نهایت نیاز دارد.

۲- ضرایب سیستم باید متناهی باشند.

۳- عملیات جمع : overflow سرریز

۴- عملیات ضرب :
- در حالت کلی : 2B+1
- ۱) overflow سرریز
- ۲) اعداد کوچک اعشاری Quantization :

$$\begin{array}{r} 0.01 \\ \times\ 0.01 \\ \hline 0.0001 \end{array}$$

راه حل : افزایش B : هزینه زیاد ← راه مطلوبی نیست. راه دوم : تغییر ساختار پیاده سازی

6.7 اثر کوانتیزاسیون ضرایب:

اثرات:

۱- سیستم همچنان LTI

۲- تغییر پاسخ فرکانسی و تابع تبدیل

میزان تغییر چقدر بوده و چه اثری در هدف سیستم داشته

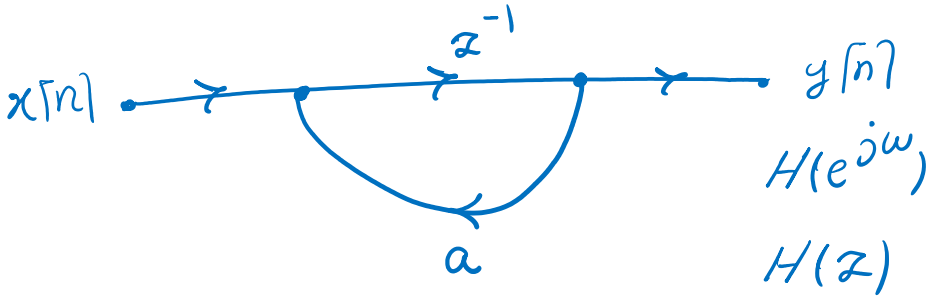
راه حل تئوری: با مقادیر جدید $H(z)$ و $H(e^{j\omega})$ را به دست آوریم.

راه حل با فرمول های سرانگشتی (نه تحلیلی و شبیه سازی)

به عبارت دیگر با کوانتیزه شدن ضرایب، محل صفر و قطبها تغییر می کند.

اثر مهم: قطبهای نزدیک به دایره واحد: احتمال ناپایدار شدن سیستم

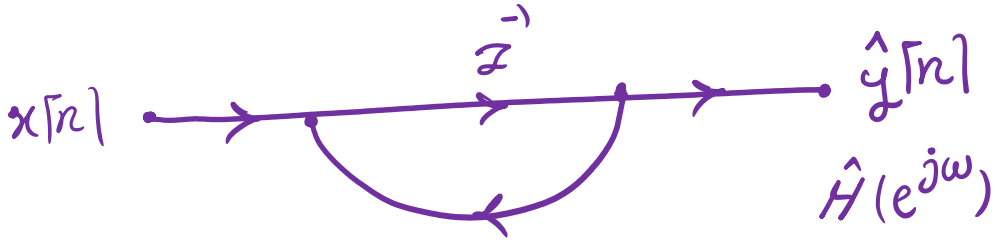
ایده آل:



$H(e^{j\omega})$

$H(z)$

در عمل: با کوانتیزه شدن ضرایب سیستم



$\hat{H}(e^{j\omega})$

$\hat{H}(z)$

مقدار کوانتیزه شده $\hat{a} = Q(a)$

$$\hat{H}(z) = \frac{1}{1-\hat{a}z^{-1}}$$

Direct: $H(z) = \dfrac{\sum b_k z^{-k}}{1-\sum a_k z^{-k}}$ $\longrightarrow$ با کوانتیزه شدن هر ضریب همه قطبها جابه جا می شوند

$1-\hat{a}_1 z^{-1} - a_2 z^{-2} \longrightarrow \hat{z}_1, \hat{z}_2$

Cascade: $H(z) = \prod_k \dfrac{b_{0k} + b_{1k} z^{-1} + b_{2k} z^{-2}}{1 - a_{1k} z^{-1} - a_{2k} z^{-2}}$ $\longrightarrow$ در ساختار cascade، با کوانتیزه شدن هر ضریب تنها دو قطب مربوط به آن جابه جا می شوند.

همچنین در مورد صفرها

مثال: اثرات کوانتیزاسیون ضرایب در فیلتر Elliptic با مرتبه ۱۲

$$0.99 \le |H(e^{j\omega})| \le 1.01, \qquad 0.3\pi \le |\omega| \le 0.4\pi,$$

$$|H(e^{j\omega})| \le 0.01 (\text{i.e.}, -40\,\text{dB}), \qquad |\omega| \le 0.29\pi,$$

$$|H(e^{j\omega})| \le 0.01 (\text{i.e.}, -40\,\text{dB}), \qquad 0.41\pi \le |\omega| \le \pi.$$

TABLE 1 UNQUANTIZED DIRECT-FORM COEFFICIENTS FOR A 12TH-ORDER ELLIPTIC FILTER

k	b_k	a_k
0	0.01075998066934	1.00000000000000
1	-0.05308642937079	-5.22581881365349
2	0.16220359377307	16.78472670299535
3	-0.34568964826145	-36.88325765883139
4	0.57751602647909	62.39704677556246
5	-0.77113336470234	-82.65403268814103
6	0.85093484466974	88.67462886449437
7	-0.77113336470234	-76.47294840588104
8	0.57751602647909	53.41004513122380
9	-0.34568964826145	-29.20227549870331
10	0.16220359377307	12.29074563512827
11	-0.05308642937079	-3.53766014466313
12	0.01075998066934	0.62628586102551

پاسخ فرکانسی:

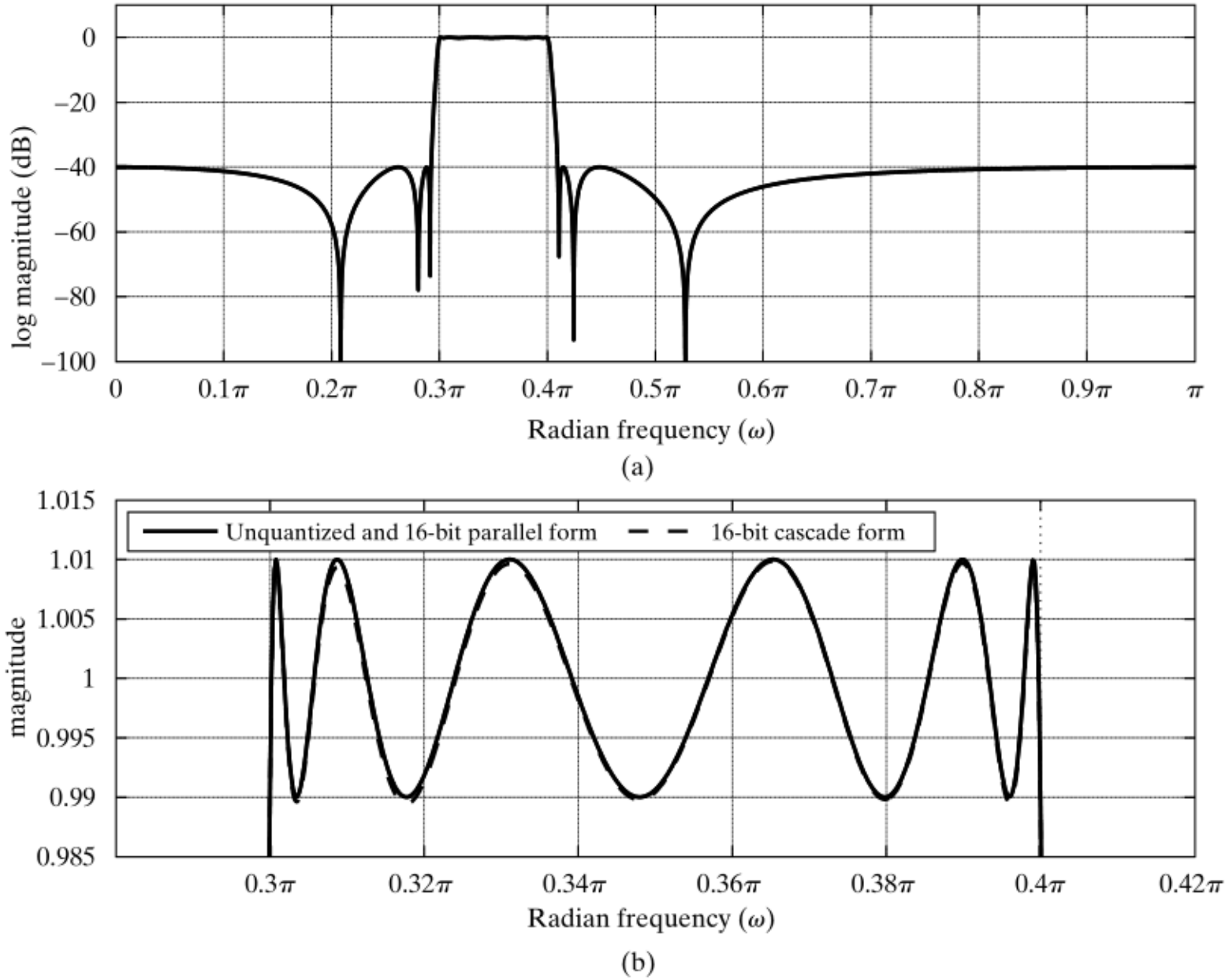


Figure 47 IIR coefficient quantization example. (a) Log magnitude for unquantized elliptic bandpass filter. (b) Magnitude in passband for unquantized (solid line) and 16-bit quantized cascade form (dashed line).

نمودار صفر و قطب:
فرم مستقیم

TABLE 2 ZEROS AND POLES OF UNQUANTIZED 12TH-ORDER ELLIPTIC FILTER.

k	$\lvert c_k \rvert$	$\angle c_k$	$\lvert d_k \rvert$	$\angle d_{1k}$
1	1.0	± 1.65799617112574	0.92299356261936	±1.15956955465354
2	1.0	± 0.65411612347125	0.92795010695052	±1.02603244134180
3	1.0	± 1.33272553462313	0.96600955362927	±1.23886921536789
4	1.0	± 0.87998582176421	0.97053510266510	±0.95722682653782
5	1.0	± 1.28973944928129	0.99214245914242	±1.26048962626170
6	1.0	± 0.91475122405407	0.99333628602629	±0.93918174153968

نکته: اثر کوانتیزه شدن ضرایب روی قطبهای نزدیک به هم به ترتیب بیشتر از قطبهای دور از هم است. (clustering اثر)

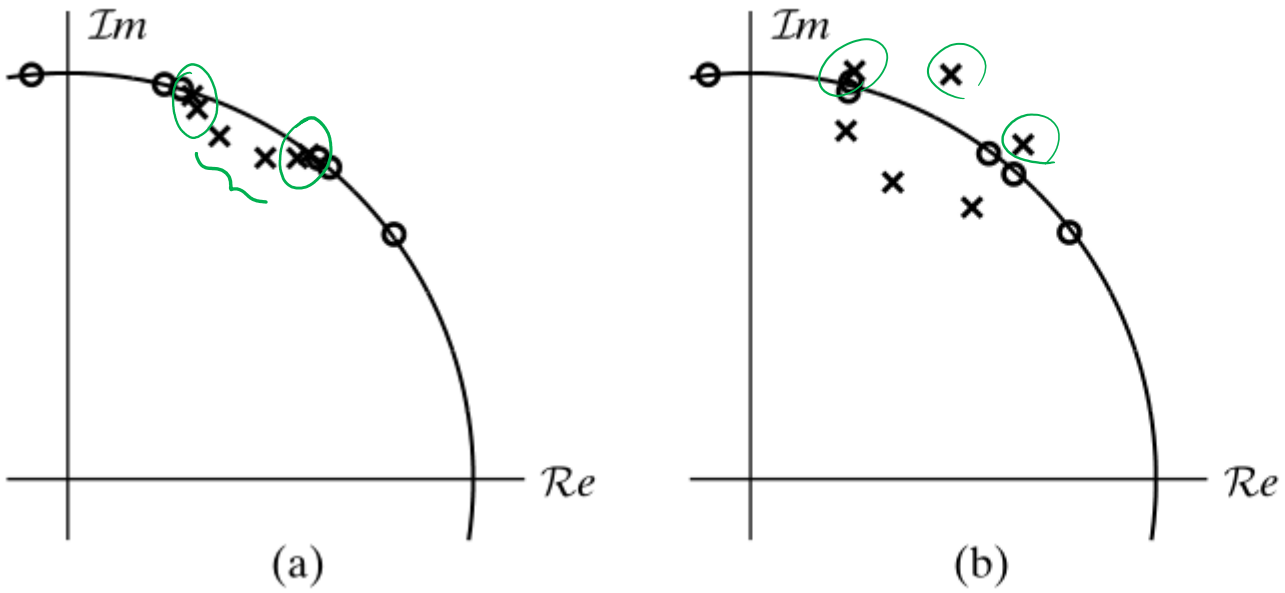


Figure 48 IIR coefficient quantization example. (a) Poles and zeros of $H(z)$ for unquantized coefficients. (b) Poles and zeros for 16-bit quantization of the direct form coefficients.

صفر و قطبهای فرم آبشاری:

$$H(z) = \prod_{k=1}^{6} \frac{b_{0k}(1 - c_k z^{-1})(1 - c_k^* z^{-1})}{(1 - d_k z^{-1})(1 - d_k^* z^{-1})} = \prod_{k=1}^{6} \frac{b_{0k} + b_{1k} z^{-1} + b_{2k} z^{-2}}{1 - a_{1k} z^{-1} - a_{2k} z^{-2}}.$$

TABLE 3 UNQUANTIZED CASCADE-FORM COEFFICIENTS FOR A 12TH-ORDER ELLIPTIC FILTER

k	a_{1k}	a_{2k}	b_{0k}	b_{1k}	b_{2k}
1	0.737904	-0.851917	0.137493	0.023948	0.137493
2	0.961757	-0.861091	0.281558	-0.446881	0.281558
3	0.629578	-0.933174	0.545323	-0.257205	0.545323
4	1.117648	-0.941938	0.706400	-0.900183	0.706400
5	0.605903	-0.984347	0.769509	-0.426879	0.769509
6	1.173028	-0.986717	0.937657	-1.143918	0.937657

TABLE 4 SIXTEEN-BIT QUANTIZED CASCADE-FORM COEFFICIENTS FOR A 12TH-ORDER ELLIPTIC FILTER

k	a_{1k}	a_{2k}	b_{0k}	b_{1k}	b_{2k}
1	24196×2^{-15}	-27880×2^{-15}	17805×2^{-17}	3443×2^{-17}	17805×2^{-17}
2	31470×2^{-15}	-28180×2^{-15}	18278×2^{-16}	-29131×2^{-16}	18278×2^{-16}
3	20626×2^{-15}	-30522×2^{-15}	17556×2^{-15}	-8167×2^{-15}	17556×2^{-15}
4	18292×2^{-14}	-30816×2^{-15}	22854×2^{-15}	-29214×2^{-15}	22854×2^{-15}
5	19831×2^{-15}	-32234×2^{-15}	25333×2^{-15}	-13957×2^{-15}	25333×2^{-15}
6	19220×2^{-14}	-32315×2^{-15}	15039×2^{-14}	-18387×2^{-14}	15039×2^{-14}

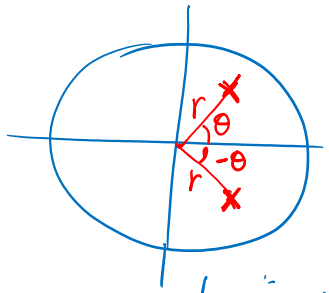
قانون سرانگشتی: ساختارهای cascade نسبت به ساختارهای Direct در مقابل کوانتیزه شدن ضرایب مقاوم‌ترند.

" " parallel " " " " " " " " "

ساختارهای Direct حساس‌ترند.

اثر کوانتیزه کردن ضرایب در سیستم های مرتبهٔ دوم :

$$H(z) = \frac{1}{1 - 2r\cos\theta\, z^{-1} + r^2 z^{-2}}$$



محل های ممکن قرار گرفتن قطبها : $re^{j\pm\theta}$

با کوانتیزه شدن ضرایب ، قطبها تنها در محل های مشخصی می توانند قرار گیرند ، که در شکل slide 7 نمایش داده شده است .

با افزایش تعداد بیت ها می توان جابه جا شدن قطبها را تا حدودی کاهش داد ، ولی نزدیک محور حقیقی Real همچنان مشکل داریم .

دلیل : کوانتیزاسیون غیر یکنواخت

راه حل : ساختار Coupled Form : slide 8 از نظر تئوری معادل

فرق در ضرایب ساختار پیاده سازی

برتری : کوانتیزاسیون یکنواخت

هزینه پیاده سازی : بیشتر، تعداد ضرب کننده ها از ۲ به ۴ افزایش یافته

زمانی که قطبها نزدیک محور حقیقی باشند ساختار Coupled Form بهتر است .

ساختار مستقیم:

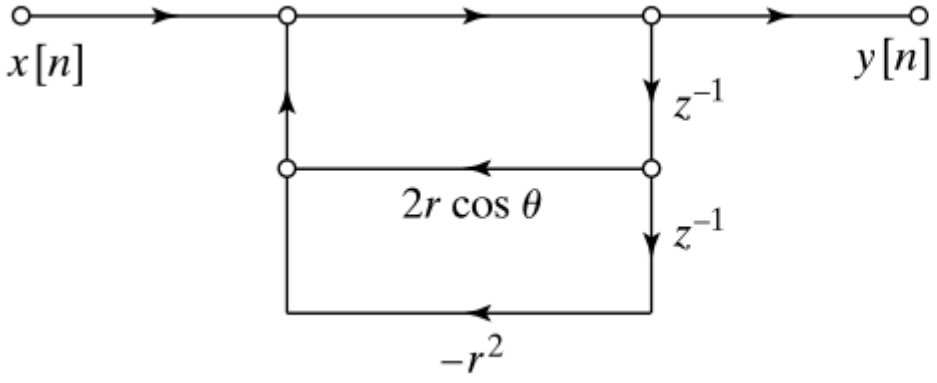


Figure 49 Direct form implementation of a complex-conjugate pole pair.

ساختار Coupled:

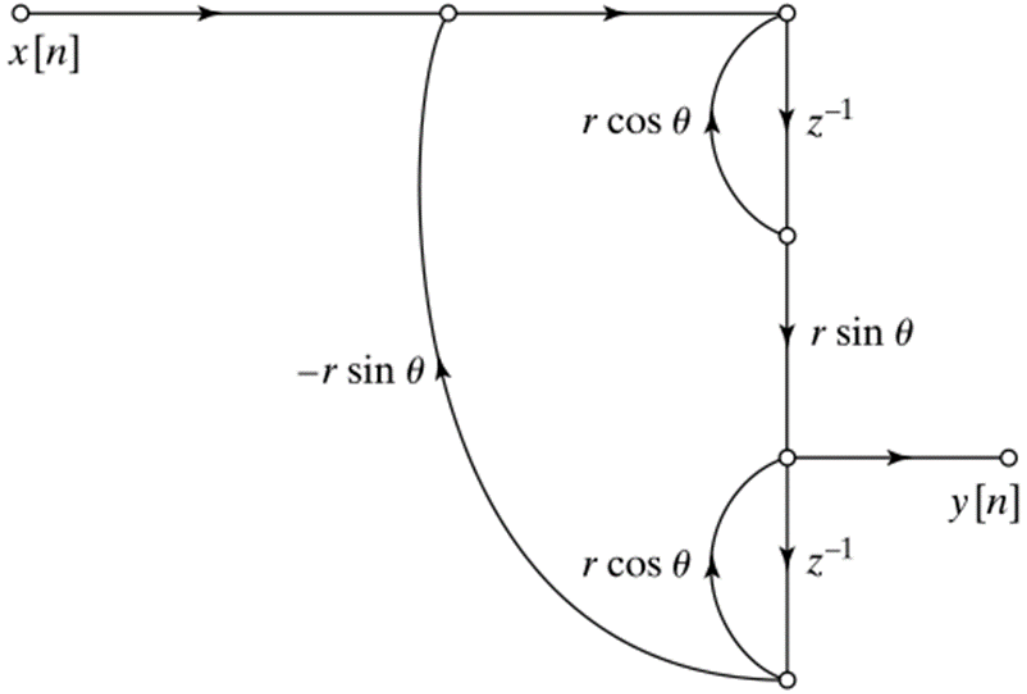
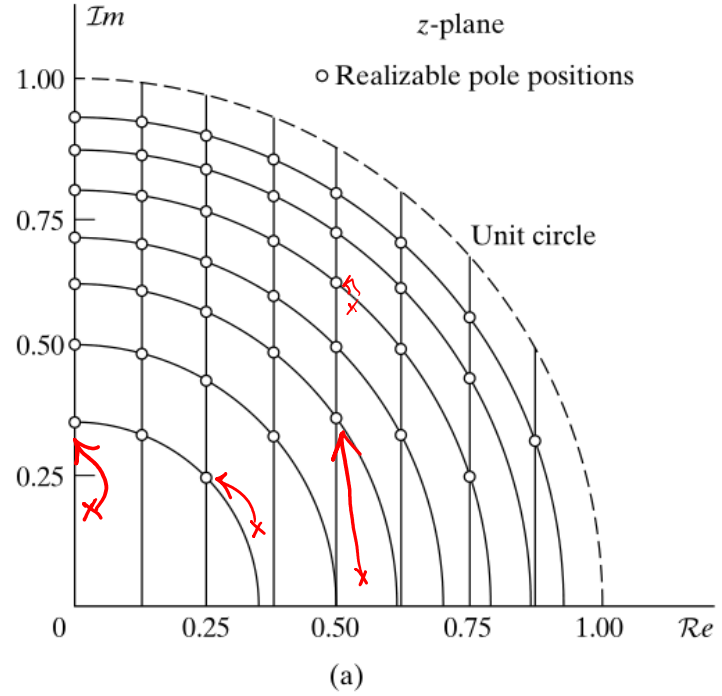
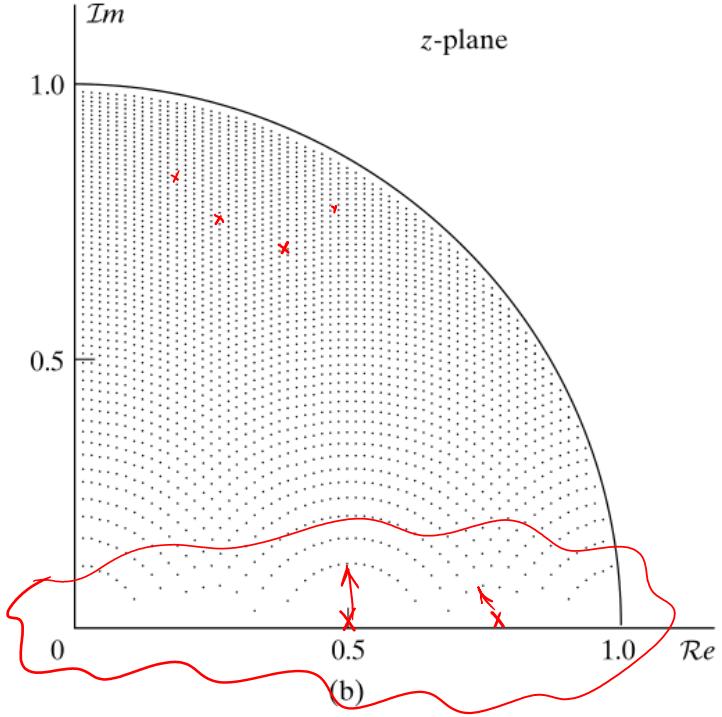


Figure 51 Coupled form implementation of a complex-conjugate pole pair.

محل قرار گرفتن قطبها در حالت کوانتیزه شده فرم مستقیم:



۴بیت



۷بیت

Figure 50 Pole-locations for the 2nd-order IIR direct form system of Figure 49. (a) Four-bit quantization of coefficients. (b) Seven-bit quantization.

محل قرار گرفتن قطبها
در حالت کوانتیزه شده
فرم Coupled:

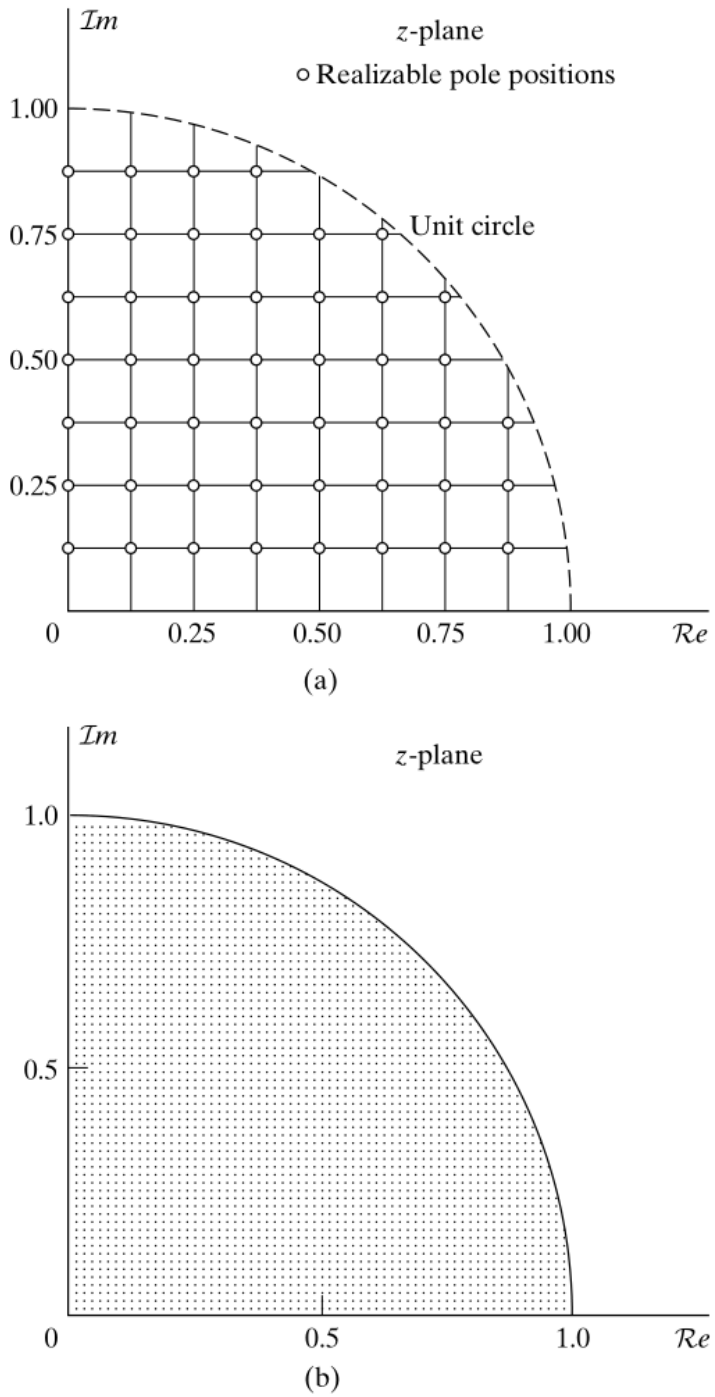


Figure 52 Pole locations for coupled form 2nd-order IIR system of Figure 51. (a) Four-bit quantization of coefficients. (b) Seven-bit quantization.

اثر کوانتیزه شدن ضرایب روی سیستمهای FIR:

- از آنجایی که در سیستم‌های FIR قطبی وجود ندارد تنها اثر کوانتیزه شدن روی صفرها را باید بررسی کنیم.

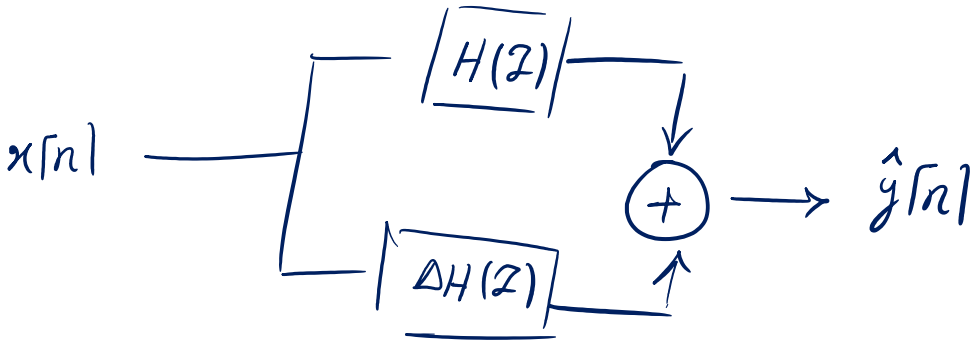
فرم مستقیم برای FIR :

$$H(z) = \sum_{n=0}^{M} h[n] z^{-n}$$

- در صورت کوانتیزه شدن ضرایب سیستم:

$$\hat{H}(z) = \sum_{n=0}^{M} \hat{h}[n] z^{-n} = H(z) + \Delta H(z)$$

$$\Delta H(z) = \sum_{n=0}^{M} \Delta h(n) z^{-n}$$



مثال: فیلتر بهینه FIR

$$0.99 \le |H(e^{j\omega})| \le 1.01, \qquad 0 \le |\omega| \le 0.4\pi,$$

$$|H(e^{j\omega})| \le 0.001 \,(\text{i.e.}, -60\,\text{dB}), \qquad 0.6\pi \le |\omega| \le \pi.$$

TABLE 5 UNQUANTIZED AND QUANTIZED COEFFICIENTS FOR AN OPTIMUM FIR LOWPASS FILTER ($M = 27$)

Coefficient	Unquantized	16 bits	14 bits	13 bits	8 bits
$h[0] = h[27]$	1.359657×10^{-3}	45×2^{-15}	11×2^{-13}	6×2^{-12}	0×2^{-7}
$h[1] = h[26]$	-1.616993×10^{-3}	-53×2^{-15}	-13×2^{-13}	-7×2^{-12}	0×2^{-7}
$h[2] = h[25]$	-7.738032×10^{-3}	-254×2^{-15}	-63×2^{-13}	-32×2^{-12}	-1×2^{-7}
$h[3] = h[24]$	-2.686841×10^{-3}	-88×2^{-15}	-22×2^{-13}	-11×2^{-12}	0×2^{-7}
$h[4] = h[23]$	1.255246×10^{-2}	411×2^{-15}	103×2^{-13}	51×2^{-12}	2×2^{-7}
$h[5] = h[22]$	6.591530×10^{-3}	216×2^{-15}	54×2^{-13}	27×2^{-12}	1×2^{-7}
$h[6] = h[21]$	-2.217952×10^{-2}	-727×2^{-15}	-182×2^{-13}	-91×2^{-12}	-3×2^{-7}
$h[7] = h[20]$	-1.524663×10^{-2}	-500×2^{-15}	-125×2^{-13}	-62×2^{-12}	-2×2^{-7}
$h[8] = h[19]$	3.720668×10^{-2}	1219×2^{-15}	305×2^{-13}	152×2^{-12}	5×2^{-7}
$h[9] = h[18]$	3.233332×10^{-2}	1059×2^{-15}	265×2^{-13}	132×2^{-12}	4×2^{-7}
$h[10] = h[17]$	-6.537057×10^{-2}	-2142×2^{-15}	-536×2^{-13}	-268×2^{-12}	-8×2^{-7}
$h[11] = h[16]$	-7.528754×10^{-2}	-2467×2^{-15}	-617×2^{-13}	-308×2^{-12}	-10×2^{-7}
$h[12] = h[15]$	1.560970×10^{-1}	5115×2^{-15}	1279×2^{-13}	639×2^{-12}	20×2^{-7}
$h[13] = h[14]$	4.394094×10^{-1}	14399×2^{-15}	3600×2^{-13}	1800×2^{-12}	56×2^{-7}

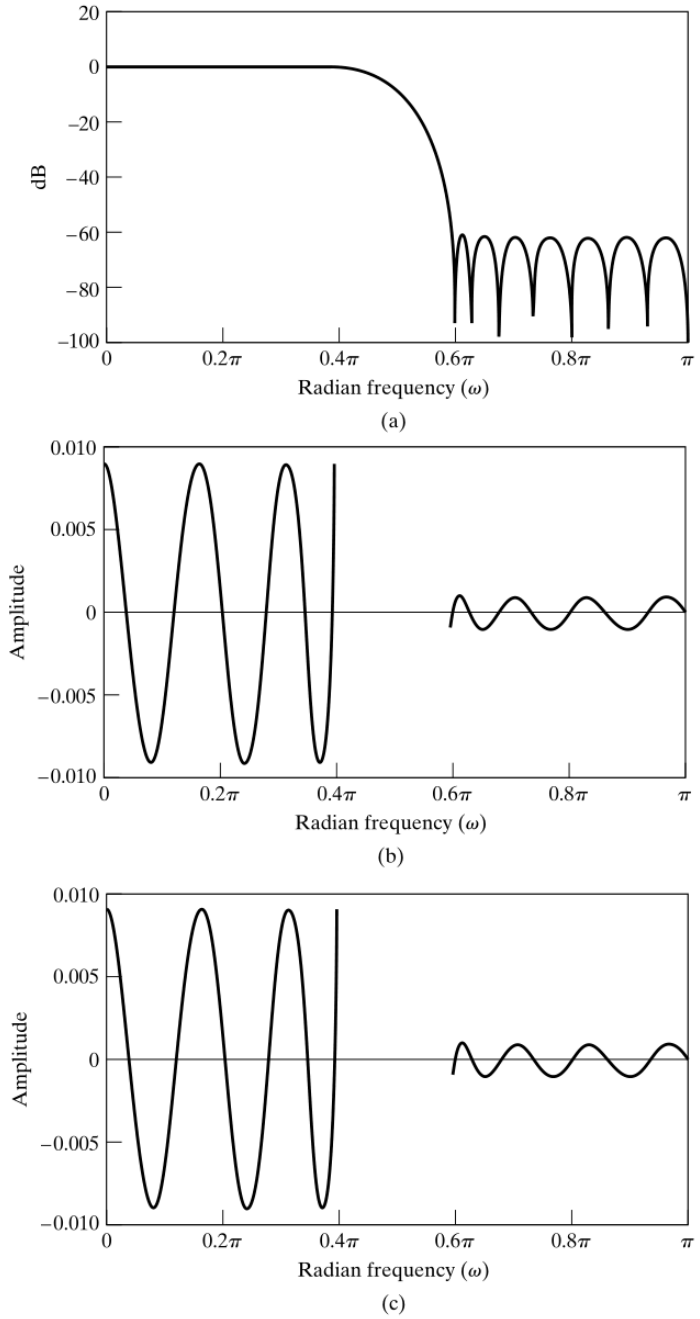


Figure 54 FIR quantization example. (a) Log magnitude for unquantized case. (b) Approximation error for unquantized case. (Error not defined in transition band.) (c) Approximation error for 16-bit quantization.

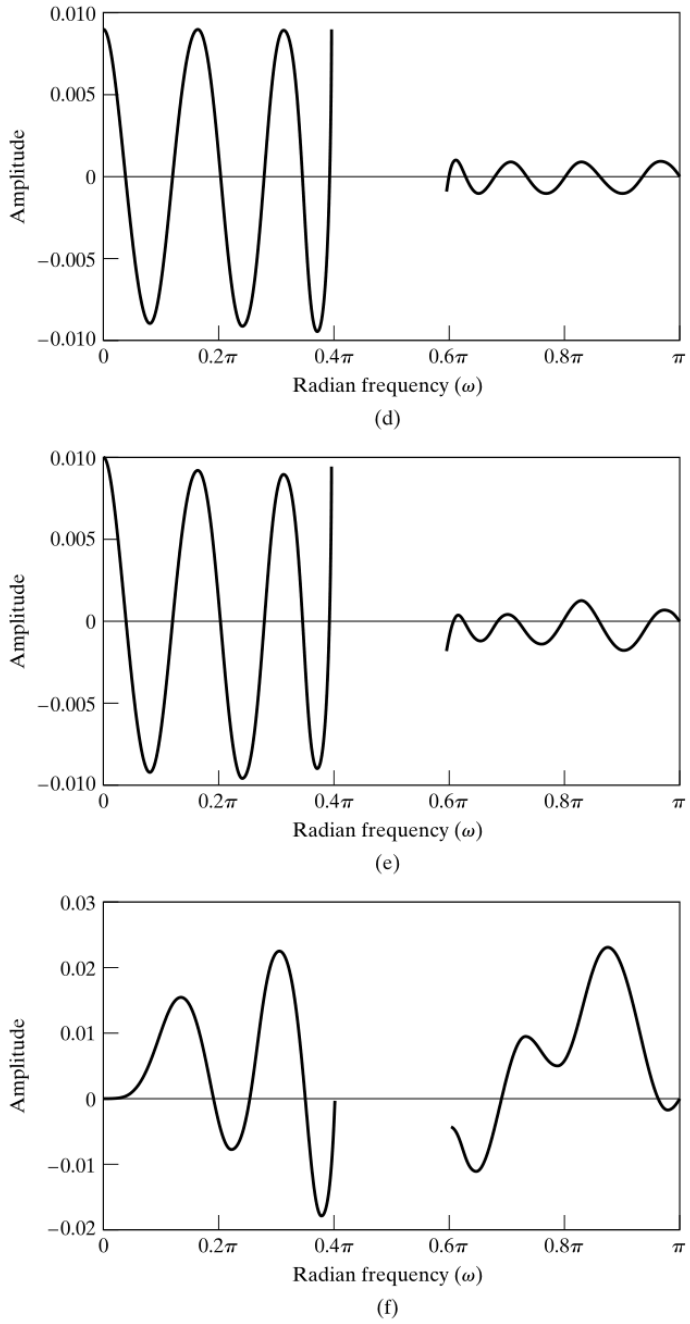


Figure 54 (*continued*) (d) Approximation error for 14-bit quantization. (e) Approximation error for 13-bit quantization. (f) Approximation error for 8-bit quantization.

نمودار صفر و قطبها:

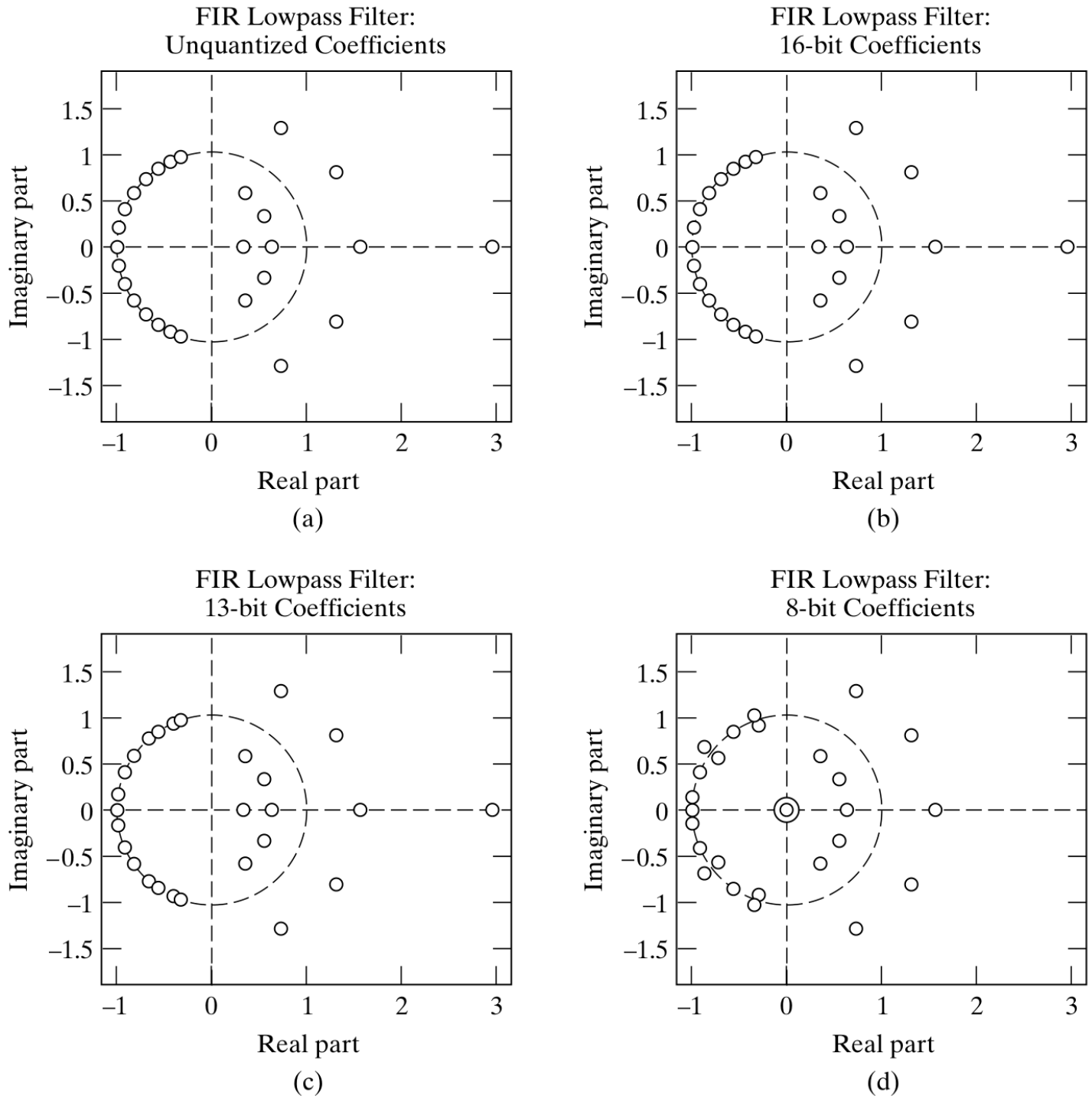


Figure 55 Effect of impulse response quantization on zeros of $H(z)$. (a) Unquantized. (b) 16-bit quantization. (c) 13-bit quantization. (d) 8-bit quantization.

راه حل ها : $\uparrow B$ ، تغییر ساختار

+ راه حل دیگر : حل مسأله در سطح طراحی $H(Z)$: راه حل تقریبی : طراحی $H(Z)$ را طوری انجام دهیم که در اثر کوانتزاسیون ، تغییرات کمتری به وجود آید . برای یک $H(e^{j\omega})$ ی توصیف چندین $H(Z)$ تقریبی ارائه دارد .

طراحی $H(Z)$:

IIR : $H(Z) = \dfrac{\sum b_k z^{-k}}{1 - \sum a_k z^{-k}}$

FIR : $H(Z) = \sum b_k z^{-k}$

FIR بهتر است ، زیرا قطبها در مبدأ قرار دارند و جابجا نمی شوند . بنابراین اثر کمتری دارد .

طراحی FIR با فاز خطی تعمیم یافته : با هر کوانتزاسیون تقارن حفظ می شود و فاز ایده آل باقی می ماند .

فاز ایده آل

$$h[n] = h[M-n]$$

$$Q(h[n]) = Q(h[M-n])$$

عیب FIR : تعداد ضرب کننده های زیاد . هزینه بالاتر

فصل ۷ : IIR { ۴ قطب ، ۴ صفر

FIR { ۱۲ صفر ، ۰ قطب

6.9 اثر نویز Round-off روی فیلترهای دیجیتال :

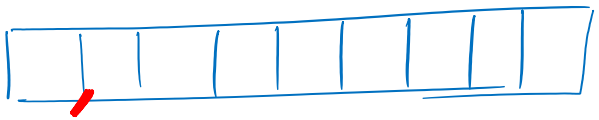
ضرب کننده ها : ضرب دو عدد B+1 بیتی ← در حالت کلی (2B+1) بیت خروجی

بنابراین باید آن را به B+1 بیت تقریب زد ← حذف بخش ناشی از این کار : Round-off Noise

برای پیشن ها : مبنا Fixed Point (در مقابل مبنا Floating Point)

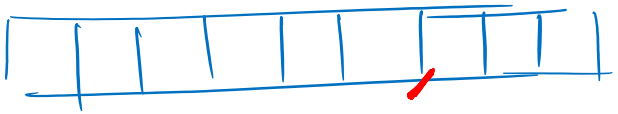
قرارداد : همه اعداد باید همزاعشاری شان در یک محل ثابت باشد (بین بیت صفر و یک)

پیشن



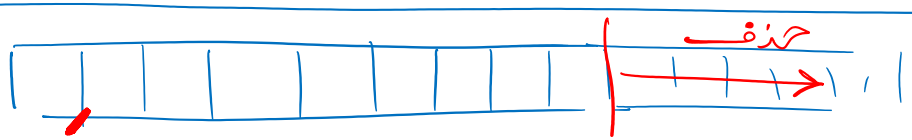
بنابراین همه اعداد کوچکتر از یک می شوند چون بیت صفرم بیت علامت است.

ضریب



ضریب { طول B+1 Fixed Point } چون مقدار ثابت دارند و می پیشن در هر لحظه تغییر می کند.

خروجی :



اثرات :

1- Quantization

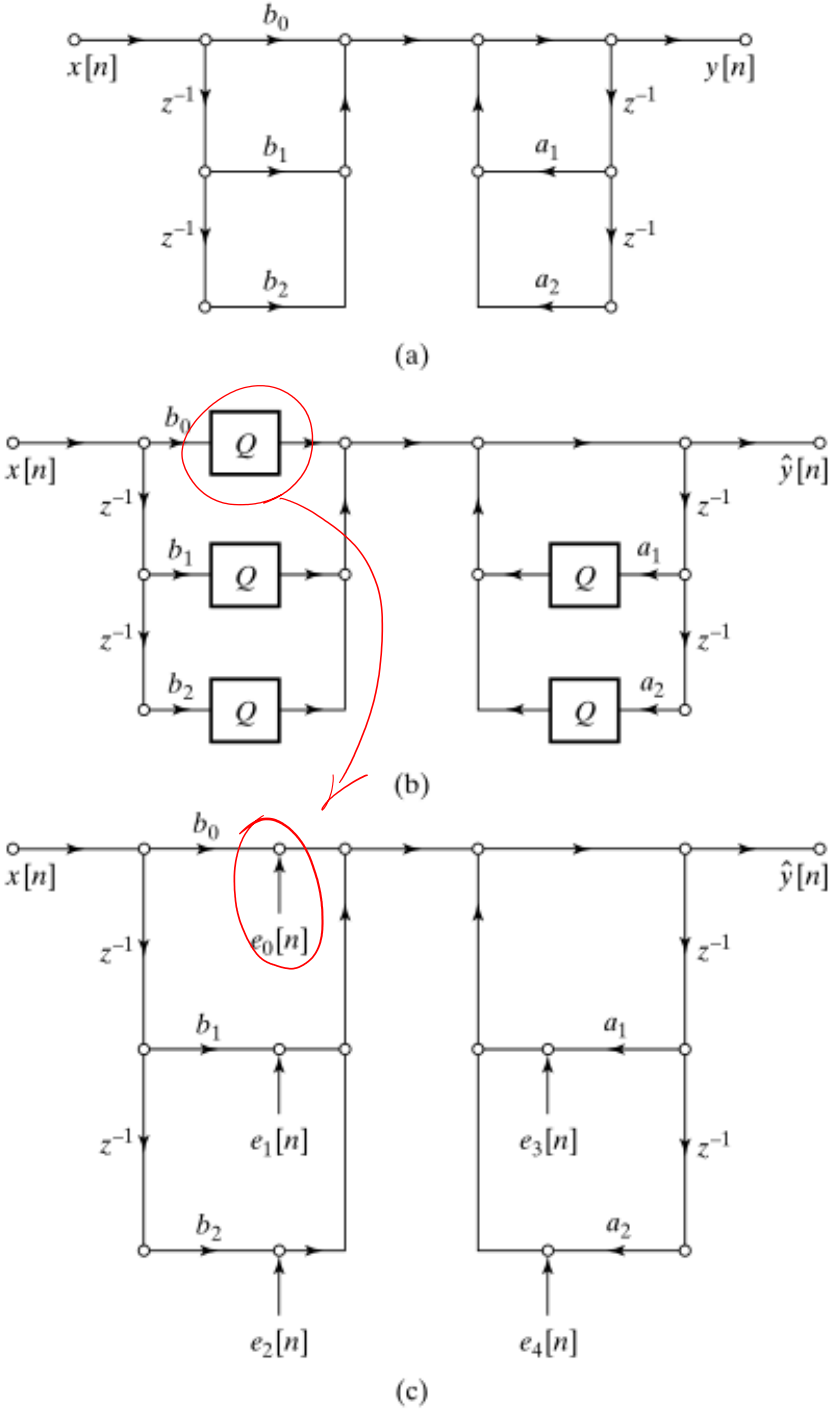
حاصلضرب کوچکتر از یک ، طول از 2B+1 بیشتر خواهد شد

2- Overflow

حاصلضرب بزرگتر از یک ، ترس از بالا

در بخش بعدی بررسی می شود

برای بررسی اثر کوانتایزرها slide 12 : در خروجی هر ضرب کننده یک کوانتایزر قرار می دهیم و به جای کوانتایزر نویز کوانتیزاسیون یا Round-off Noise قرار داده می شود.



فرم مستقیم (I)

مدل کوانتیزه شده غیرخطی

مدل نویز خطی

Figure 57 Models for direct form I system. (a) Infinite-precision model. (b) Nonlinear quantized model. (c) Linear-noise model.

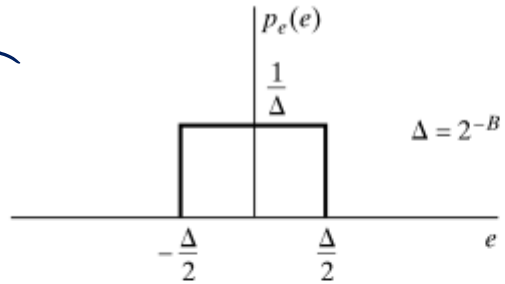
دو نوع کوانتیزاسیون : $(B+1)$ بیت

۱- روند کردن :

$$-\frac{1}{2}2^{-B} < e[n] \leq \frac{1}{2}2^{-B}$$

$$m_e = 0$$

$$\sigma_e^2 = \frac{2^{-2B}}{12}$$



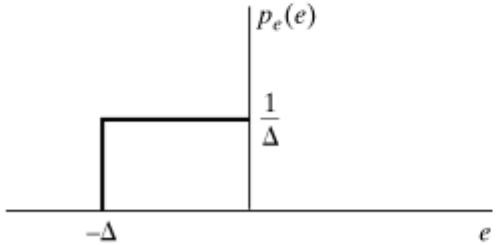
(a)

۲- 2's complement truncation

$$-2^{-B} < e[n] \leq 0$$

$$m_e = -\frac{2^{-B}}{2}$$

$$\sigma_e^2 = \frac{2^{-2B}}{12}$$



(b)

Figure 58 Probability density function for quantization errors. (a) Rounding. (b) Truncation.

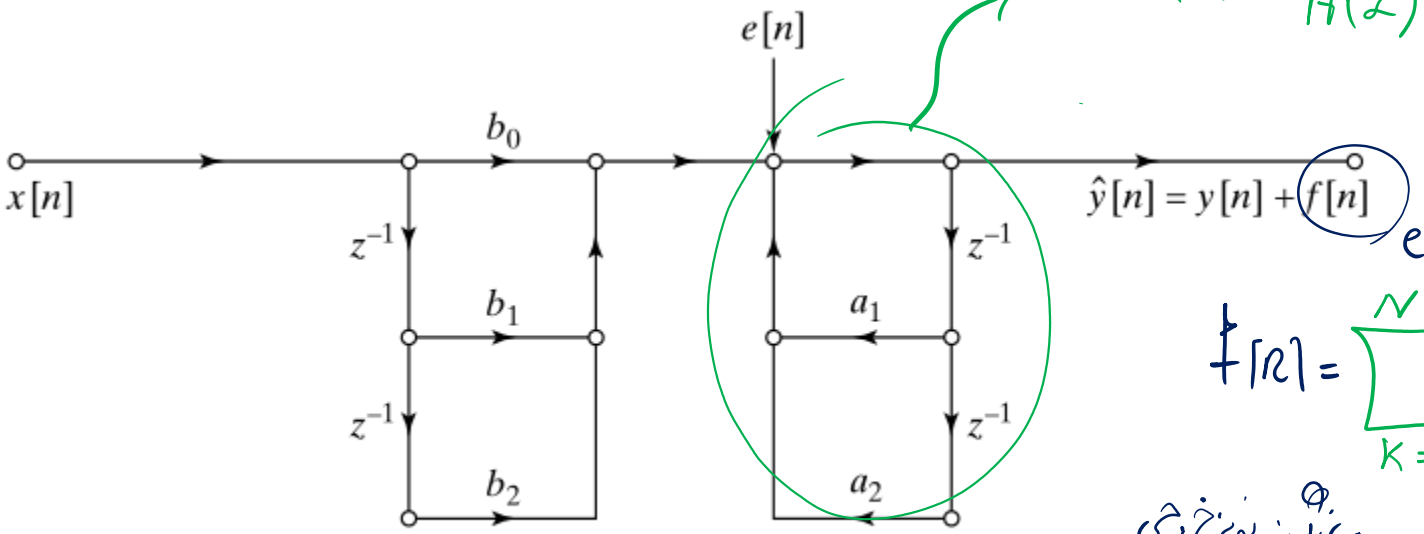
دنباله خودهمبسته

$$\phi_{ee}[n] = \sigma_e^2\delta[n] + m_e^2 \xrightarrow{\text{rounding}} \phi_{ee}[n] = \sigma_e^2\delta[n] \xrightarrow{F} \Phi_{ee}(e^{j\omega}) = \sigma_e^2$$

طیف توان

$$e[n] = e_0[n] + e_1[n] + \cdots + e_4[n]$$

$$H_{ef}(z) = \frac{1}{A(z)}$$



$e[n]$?

$$f[n] = \sum_{k=1}^{N} a_k f[n-k] + e[n]$$

میانگین نویز خروجی

$$m_f = m_e \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_{ef}[n] = m_e H_{ef}(e^{j0})$$

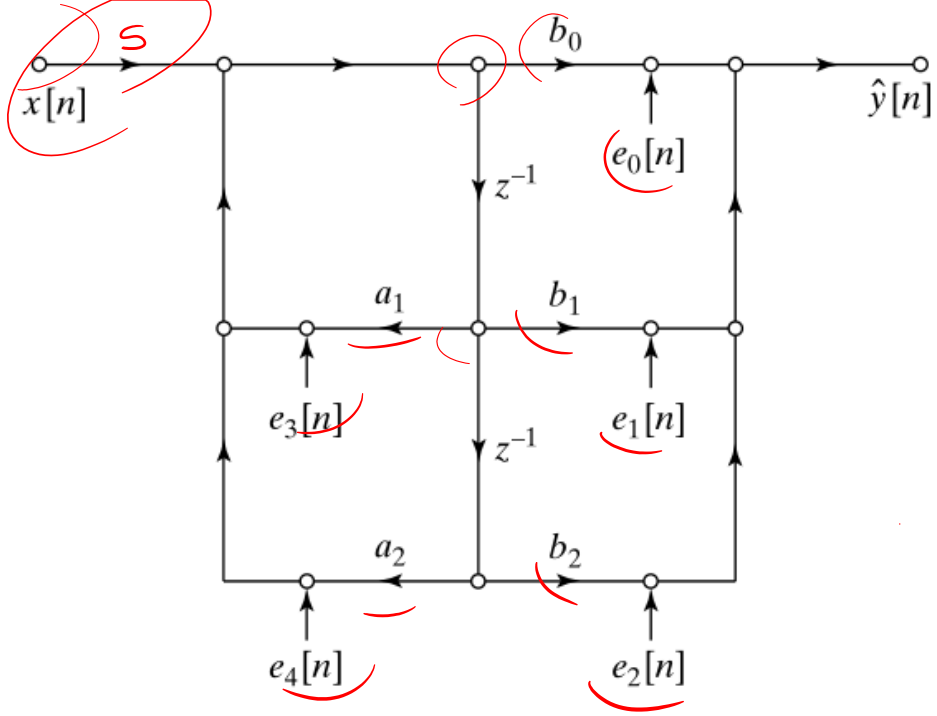
Figure 59 Linear-noise model for direct form I with noise sources combined.

$$\sigma_e^2 = \sigma_{e0}^2 + \sigma_{e1}^2 + \cdots + \sigma_{e4}^2 = 5 \cdot \frac{2^{-2B}}{12}$$

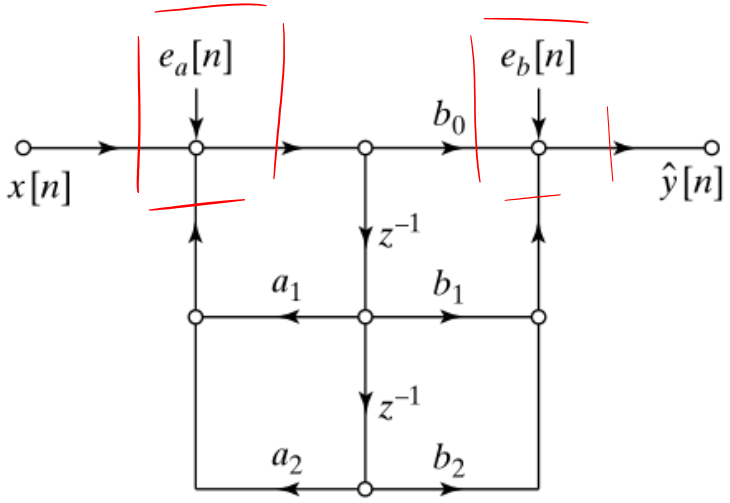
PSD: $P_{ff}(\omega) = \sigma_e^2 \, |H_{ef}(e^{j\omega})|^2$

در حالت کلی پیاده سازی فرم مستقیم (I) $\longrightarrow$ $\sigma_e^2 = (M+1+N)\dfrac{2^{-2B}}{12}$

$$\sigma_f^2 = (M+1+N)\frac{2^{-2B}}{12} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |h_{ef}[n]|^2$$



(a)



(b)

فرم مستقیم (II)

$\frac{S\downarrow}{N} = SNR\downarrow$

Figure 61 Linear-noise models for direct form II. (a) Showing quantization of individual products. (b) With noise sources combined.

با مدل کردن کوانتایزرها به صورت نویز، خواهیم شد:

$$e[n] = e_0[n] + e_1[n] + \cdots + e_4[n]$$

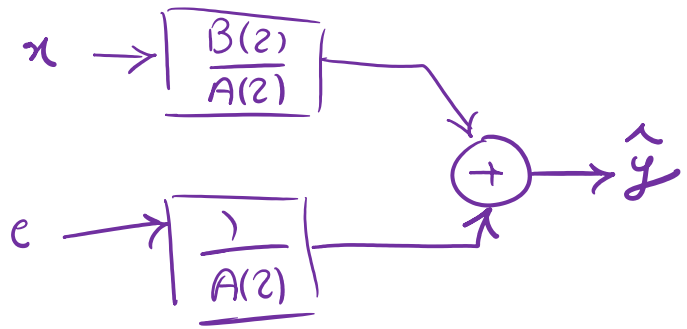
$$\hat{y}[n] = y[n] + f[n]$$

خروجی با کوانتایزر ← $\hat{y}[n]$

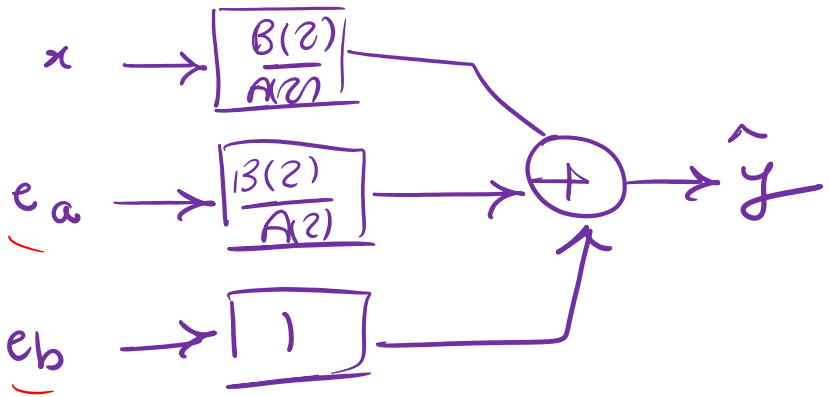
خروجی ایده‌آل ← $y[n]$

اثر نویز ← $f[n]$

Direct (I):



Direct II:



کدام بهتر است؟

بستگی به محل صفر و قطب‌ها

۲- overflow (سرریز) در جمع و ضرب رخ می‌دهد.

راه حل: Scaling

قضیه: در یک سیستم پایدار با فرض ورودی کراندار همواره می‌توان ضریب ثابت s را به گونه‌ای یافت که در هیچ گره‌ای سرریز رخ ندهد.

عدد مثبت و کوچکتر از یک

$$x[n] \longrightarrow \boxed{\text{سیستم}} \longrightarrow y[n]$$

$$x[n] \xrightarrow{s} \boxed{\text{سیستم}} \longrightarrow y[n]$$

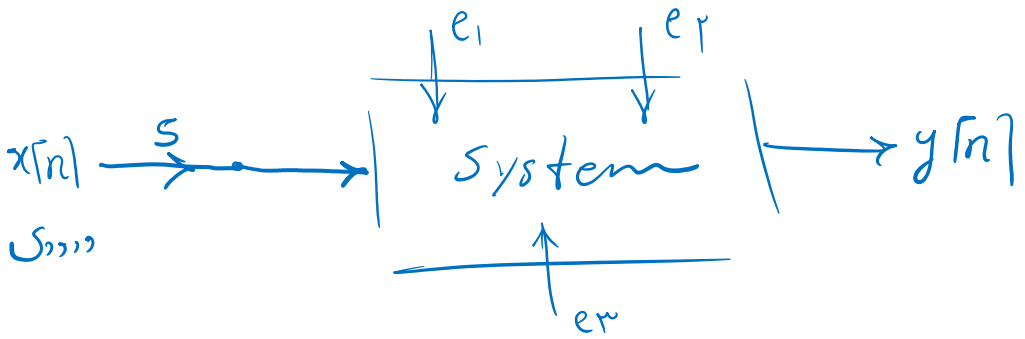
$$\boxed{s < \frac{1}{x_{max} \max_m \sum |h_k[m]|}}$$

$h_k[n]$: پاسخ ضربه گره ورودی تا گره k ام

نکته: s نباید خیلی کوچک انتخاب شود. زیرا با حل مشکل overflow انبار حافظه اعداد کوچک رخ می‌دهد.

quantization

مشکل:



سیگنال را کوچک می‌کنیم ولی نویز به قوت خود باقی است.

راه حل: اعمال s به صورت تکه‌ای شده

s_1, s_2, s_3

مثال

$$0.99 \le |H(e^{j\omega})| \le 1.01, \qquad |\omega| \le 0.5\pi,$$

$$|H(e^{j\omega})| \le 0.01, \qquad 0.56\pi \le |\omega| \le \pi.$$

$$H(z) = \underbrace{0.079459}_{s} \prod_{k=1}^{3} \left(\frac{1 + b_{1k}z^{-1} + z^{-2}}{1 - a_{1k}z^{-1} - a_{2k}z^{-2}} \right) = 0.079459 \prod_{k=1}^{3} H_k(z),$$

TABLE 6 COEFFICIENTS FOR ELLIPTIC LOWPASS FILTER IN CASCADE FORM

k	a_{1k}	a_{2k}	b_{1k}
1	0.478882	−0.172150	1.719454
2	0.137787	−0.610077	0.781109
3	−0.054779	−0.902374	0.411452

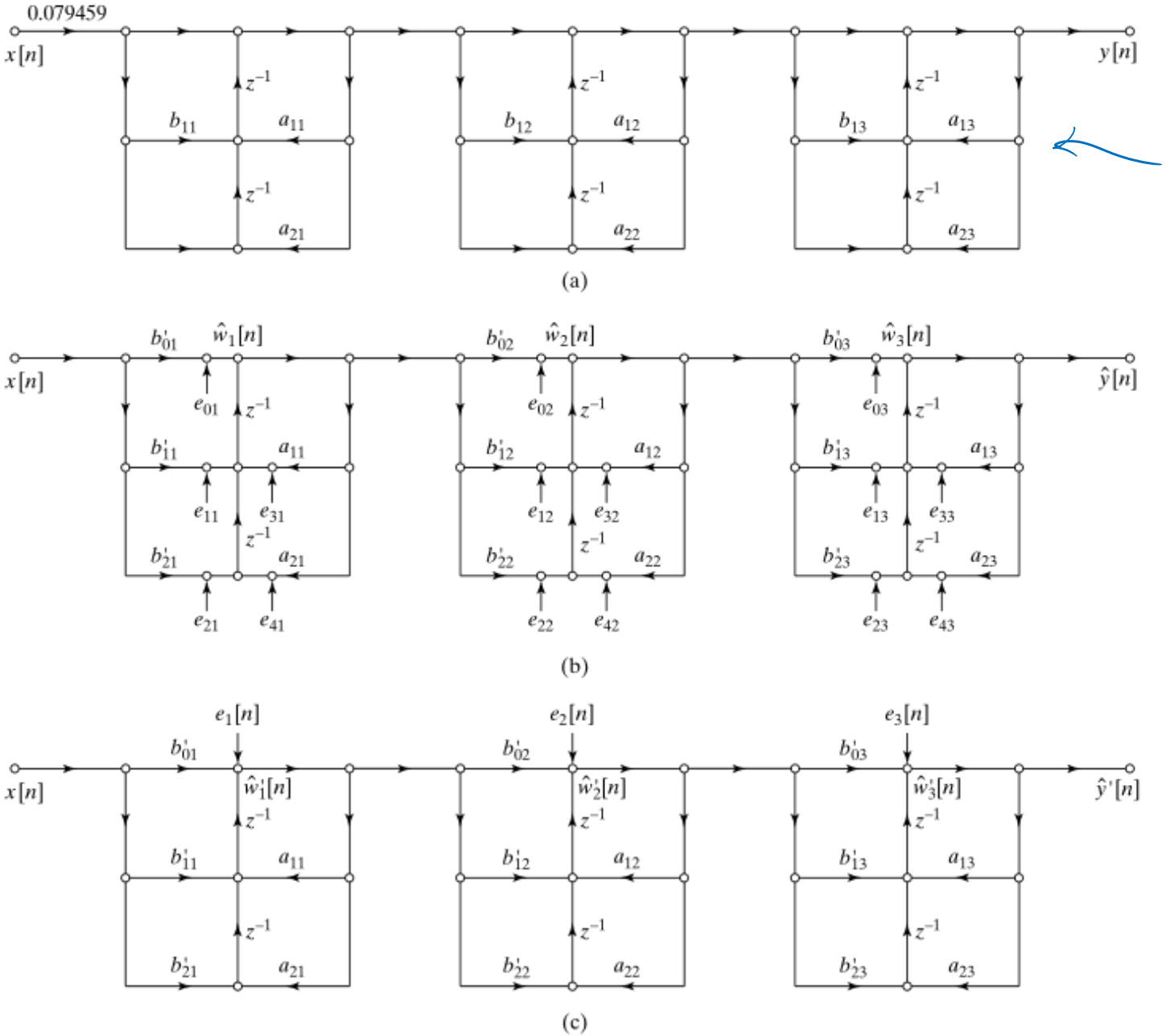
$$H(z) = s_1 H_1(z) s_2 H_2(z) s_3 H_3(z),$$

$s_1 s_2 s_3 = 0.079$ به طوری که

$$H(z) = \prod_{k=1}^{3} \left(\frac{b'_{0k} + b'_{1k} z^{-1} + b'_{2k} z^{-2}}{1 - a_{1k} z^{-1} - a_{2k} z^{-2}} \right) = \prod_{k=1}^{3} H'_k(z),$$

بدون تغییر

$b'_{0k} = b'_{2k} = s_k \quad ; \quad b'_{1k} = s_k b_{1k}$



فرم ترانهاده فرم متعامد (II)

ترکیب نویزهای خطی

Figure 64 Models for 6th-order cascade system with transposed direct form II subsystems. (a) Infinite-precision model. (b) Linear-noise model for scaled system, showing quantization of individual multiplications. (c) Linear-noise model with noise sources combined.

انتخاب جفت صفر قطب‌ها و ترتیب قرار گرفتن زیرسیستم‌ها به حل یک مسئله بهینه‌سازی کامپیوتری نیاز دارد.

قانون‌های سرانگشتی:

۱- قطب نزدیکتر به دایره واحد را با نزدیکترین صفر به آن به عنوان جفت صفر قطب انتخاب می‌کنیم.

۲- قانون ۱ را تکرار می‌کنیم تا همه صفرها و قطب‌ها انتخاب شوند.

۳- زیرسیستم‌های مرتبه ۲ حاصل باید به صورت یا صعودی یا نزولی بر اساس فاصله از دایره واحد با هم مرتب شوند:

1 2 3

3 2 1

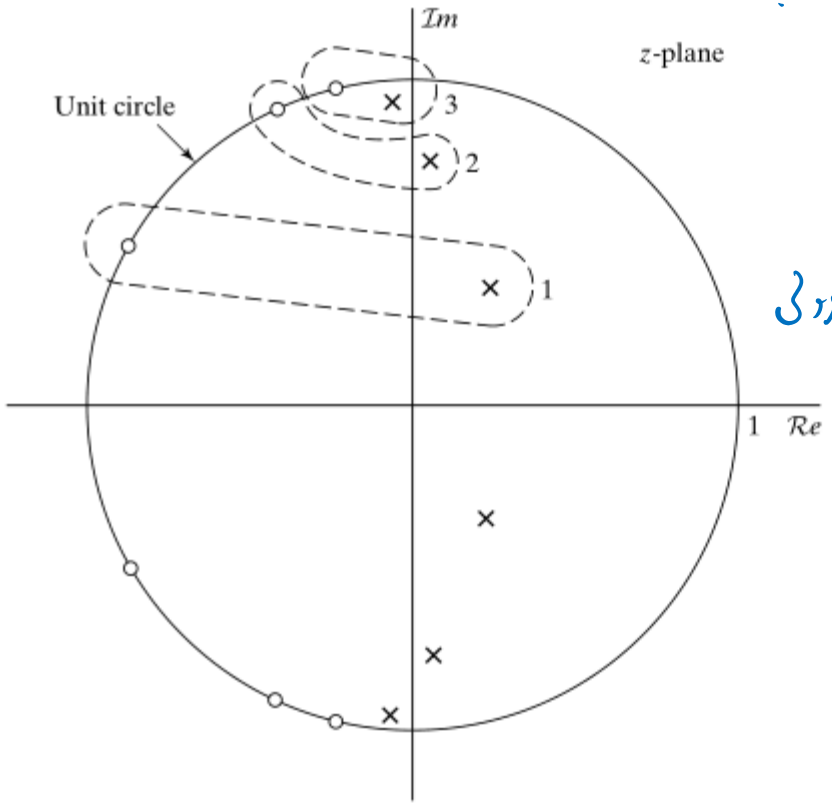


Figure 65 Pole–zero plot for 6th-order system of Figure 64, showing pairing of poles and zeros.

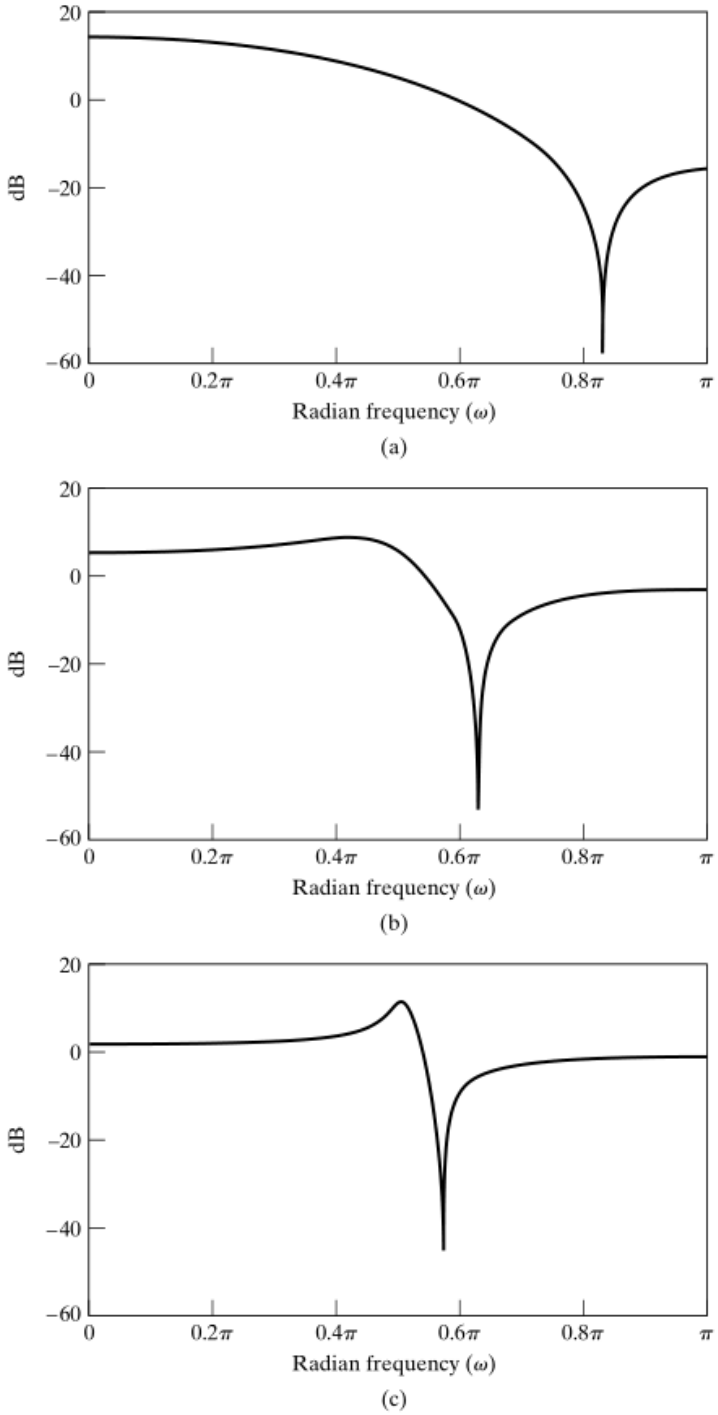


Figure 66 Frequency-response functions for example system.
(a) $20 \log_{10} |H_1(e^{j\omega})|$.
(b) $20 \log_{10} |H_2(e^{j\omega})|$.
(c) $20 \log_{10} |H_3(e^{j\omega})|$.

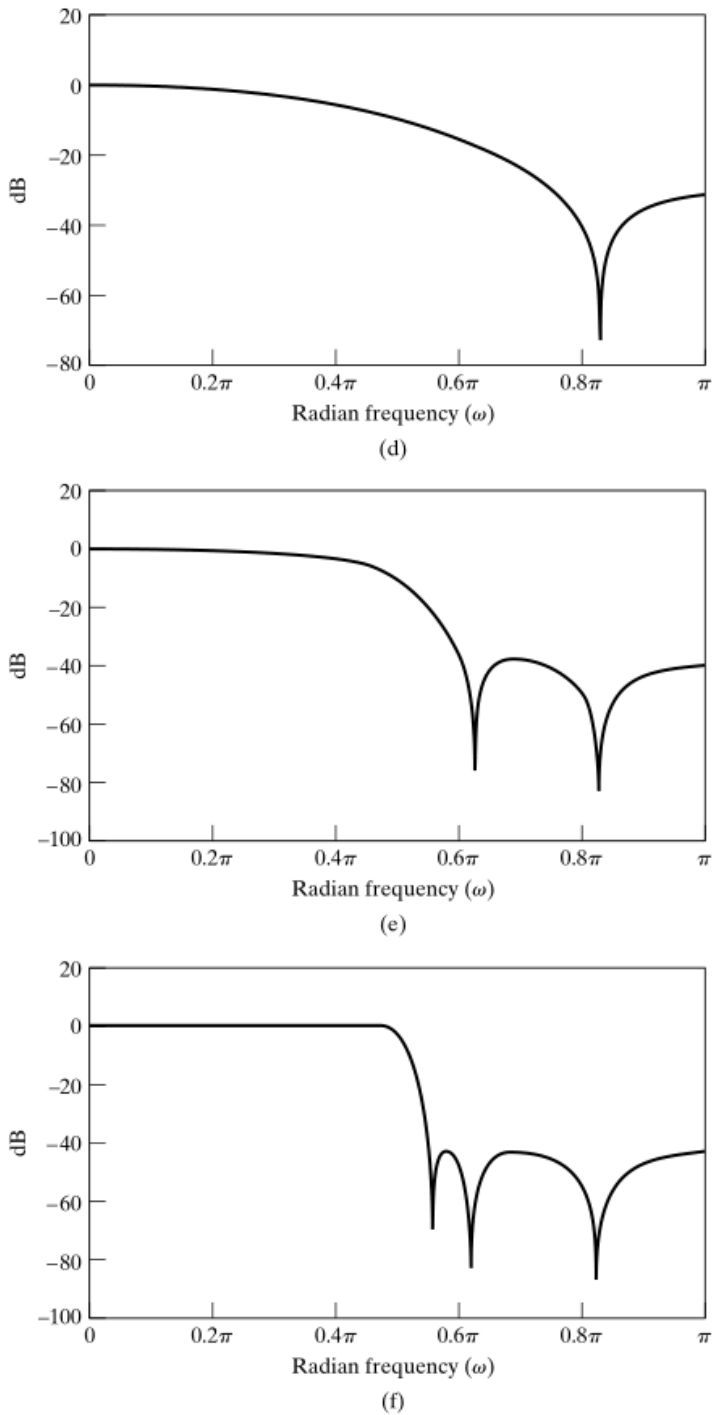


Figure 66 (*continued*)
(d) $20 \log_{10} |H_1'(e^{j\omega})|$.
(e) $20 \log_{10} |H_1'(e^{j\omega})H_2'(e^{j\omega})|$.
(f) $20 \log_{10} |H_1'(e^{j\omega})H_2'(e^{j\omega})H_3'(e^{j\omega})|$
$= 20 \log_{10} |H'(e^{j\omega})|$.

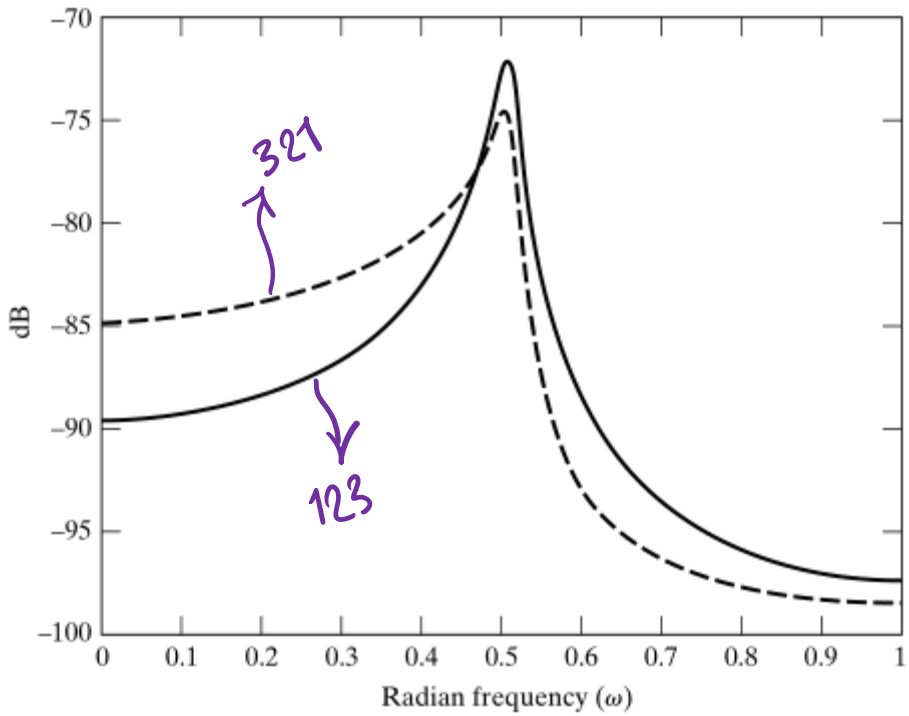


Figure 67 Output noise power spectrum for 123 ordering (solid line) and 321 ordering (dashed line) of 2nd-order sections.

همانطور که توضیح دادیم

ترتیب قرارگرفتن: 123

Zero Input Limit Cycles

ZILC

6.10

مثال از اسلاید $a = \pm\frac{1}{2}$

$x[n] = \frac{7}{8}\delta[n]$

حالت اول : بدون اثر کوانتایزاسیون با دقت نامحدود

$y[n] = \frac{7}{8}\left(\pm\frac{1}{2}\right)^n u[n]$

$n \to \infty \Rightarrow y[n] \to 0$

خروجی صفر به ازای ورودی صفر

حالت دوم : اثر کوانتایزر ۴ بیتی

اسلاید

بر خلاف انتظار خروجی روی مقدار ثابت $\frac{1}{8}$ یا نوسانی $\pm\frac{1}{8}$ ثابت می‌شود.

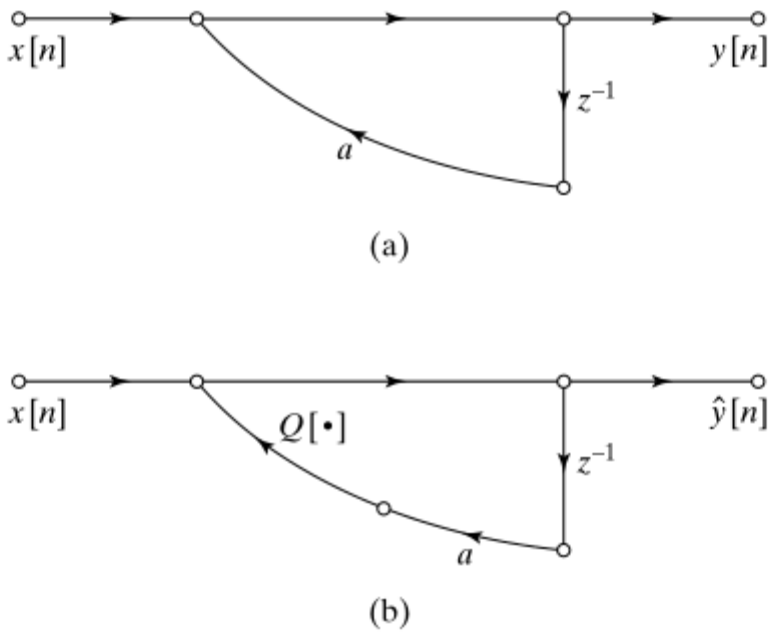
دلیل : الگوی غیرخطی $Q[\cdot]$ و وجود حلقه‌های سیستم

مثال ساده : سیستم علوی با ورودی صفر : خروجی وزوز

راه حل‌ها : ۱. $B\uparrow$ ← $\frac{1}{8}$ ← $\frac{1}{64}$ به صفر نزدیک می‌شود.

۲. ساختارهای خاص

۳. FIR بدون loop



بدون کوانتیزاسیون

اثر کوانتیزاسیون

Figure 69 1st-order IIR system. (a) Infinite-precision linear system. (b) Nonlinear system due to quantization.

مثال:

$$y[n] = ay[n-1] + x[n] \qquad |a| < 1$$

فرض کنید $a = \frac{1}{2} = 0.100b$ و ورودی به شکل زیر باشد:

$$x[n] = \frac{7}{8}\delta[n] = (0.111b)\delta[n]$$

n	y[n]	Q(y[n])
0	7/8=0.111b	7/8=0.111b
1	7/16=0.011100b	1/2=0.100b
2	1/4=0.010000b	1/4=0.010b
3	1/8=0.001000b	1/8=0.001b
4	1/16=0.00010b	1/8=0.001b

خروجی بدون کوانتیزاسیون

خروجی با کوانتیزاسیون عملی

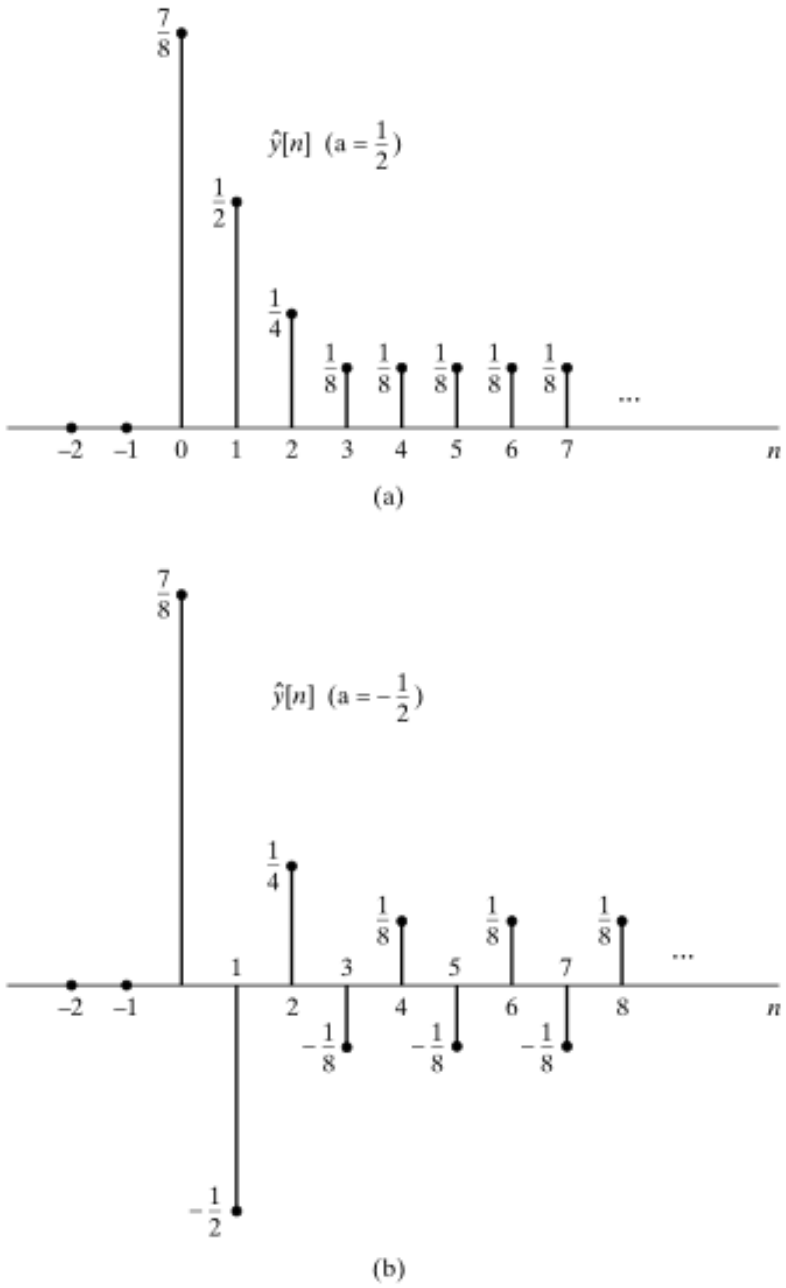


Figure 70 Response of the 1st-order system of Figure 69 to an impulse. (a) $a = \frac{1}{2}$. (b) $a = -\frac{1}{2}$.