Chapter 8: DFT

فصل هشتم : تبدیل فوریه گسسته Discrete Fourier Transform

مرجع : کتاب DSP ، oppenheim

فصل دوم کتاب DSP oppenheime ← DFS : Discrete Fourier Series — سری فوریه گسسته

DTFT : Discrete-Time Fourier Transform — تبدیل فوریه زمان گسسته

فصل هشتم ← DFT : Discrete Fourier Transform — تبدیل فوریه گسسته

فصل نهم ← FFT : Fast Fourier Transform — تبدیل فوریه سریع

فصل 6 کتاب Advanced Topics oppenheim ← STFT : Short-Time Fourier Transform — تبدیل فوریه زمان کوتاه

PEARSON

Discrete-Time Signal Processing, Third Edition
Alan V. Oppenheim • Ronald W. Schafer

8.1 : DFS : Discrete Fourier Series

$W_N = e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)}$ → دوره تناوب N

روابط سری فوریه گسسته :

$\tilde{x}[n]$ ↓ سیگنال پریودیک زمان گسسته

رابطه آنالیز
$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{x}[n]\, W_N^{kn}$$

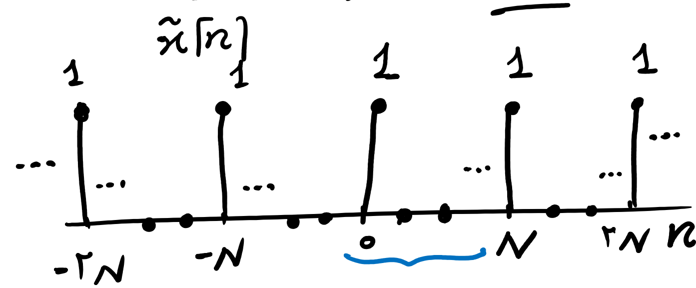
رابطه سنتز
$$\tilde{x}[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \tilde{X}[k]\, W_N^{-kn}$$

$$\tilde{x}[n] \underset{N}{\overset{DFS}{\longleftrightarrow}} \tilde{X}[k]$$

مثال : ضرایب سری فوریه قطار ضربه پریودیک :

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \delta[n - rN]$$

$$= \begin{cases} 1 \; ; & n = rN \;, \quad r \text{ عدد صحیح} \\ 0 \; ; & o.w. \end{cases}$$



$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{N-1} \delta[n]\, W_N^{kn} = W_N^{0} = 1 \;;\quad \tilde{X}[k] = 1 \text{ برای هر } k$$

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \delta[n - rN] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)kn}$$

مثال: سیگنال متناظر با ضرایب سری فوریه زیر را بدست آورید:

$$\tilde{Y}[k] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} N\delta[k-rN] \qquad \tilde{y}[n] = ?$$

$$\tilde{y}[n] = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} N\delta[k]\, W_N^{-kn} = W_N^{0} = 1$$

$$\tilde{y}[n] = 1 \; ; \forall n$$

Duality خاصیت دوگانی

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \delta[n-rN] \xleftrightarrow{DFS} \tilde{X}[k] = 1$$

$$\tilde{y}[n] = 1 \xleftrightarrow{DFS} \tilde{Y}[k] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} N\delta[k-rN]$$

مثال ۳: ضرایب سری فوریه قطار پالس مستطیلی پریودیک :

$$\tilde{X}[k] = \sum_{n=0}^{4} W_{10}^{kn} = \sum_{n=0}^{4} e^{-j\left(\frac{2\pi}{10}\right)kn}$$

$$\tilde{X}[k] = \frac{1-W_{10}^{5k}}{1-W_{10}^{k}} = e^{-j\left(\frac{4\pi k}{10}\right)} \underbrace{\frac{\sin(\pi k/2)}{\sin(\pi k/10)}}_{-1}$$

$|\tilde{X}[k]|$

$\measuredangle \tilde{X}[k]$

$$\measuredangle \tilde{X}[k] = -\frac{4\pi k}{10} \pm \pi + \measuredangle \underbrace{\frac{\sin(\pi k/2)}{\sin(\pi k/10)}}_{\{0,\ \pi\}}$$

نکته:

۱- اگر $\tilde{x}[n]$ پریودیک باشد آنگاه $\tilde{X}[k]$ پریودیک خواهد بود.

۲- به ازای هر بازه $\tilde{X}[k]$ پریودیک اگر سیگنال $\tilde{x}[n]$ را به صورت تکه پیدا کنیم $\tilde{X}[k]$، DFS آن باشد

Figure 8.1 Periodic sequence with period $N = 10$ for which the Fourier series representation is to be computed.

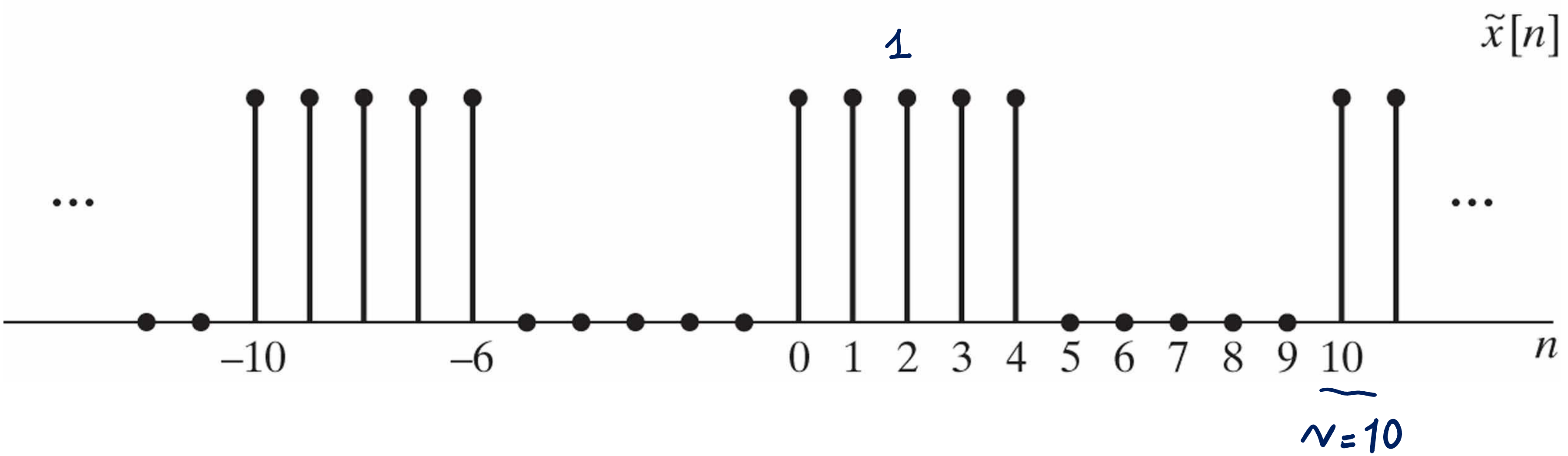
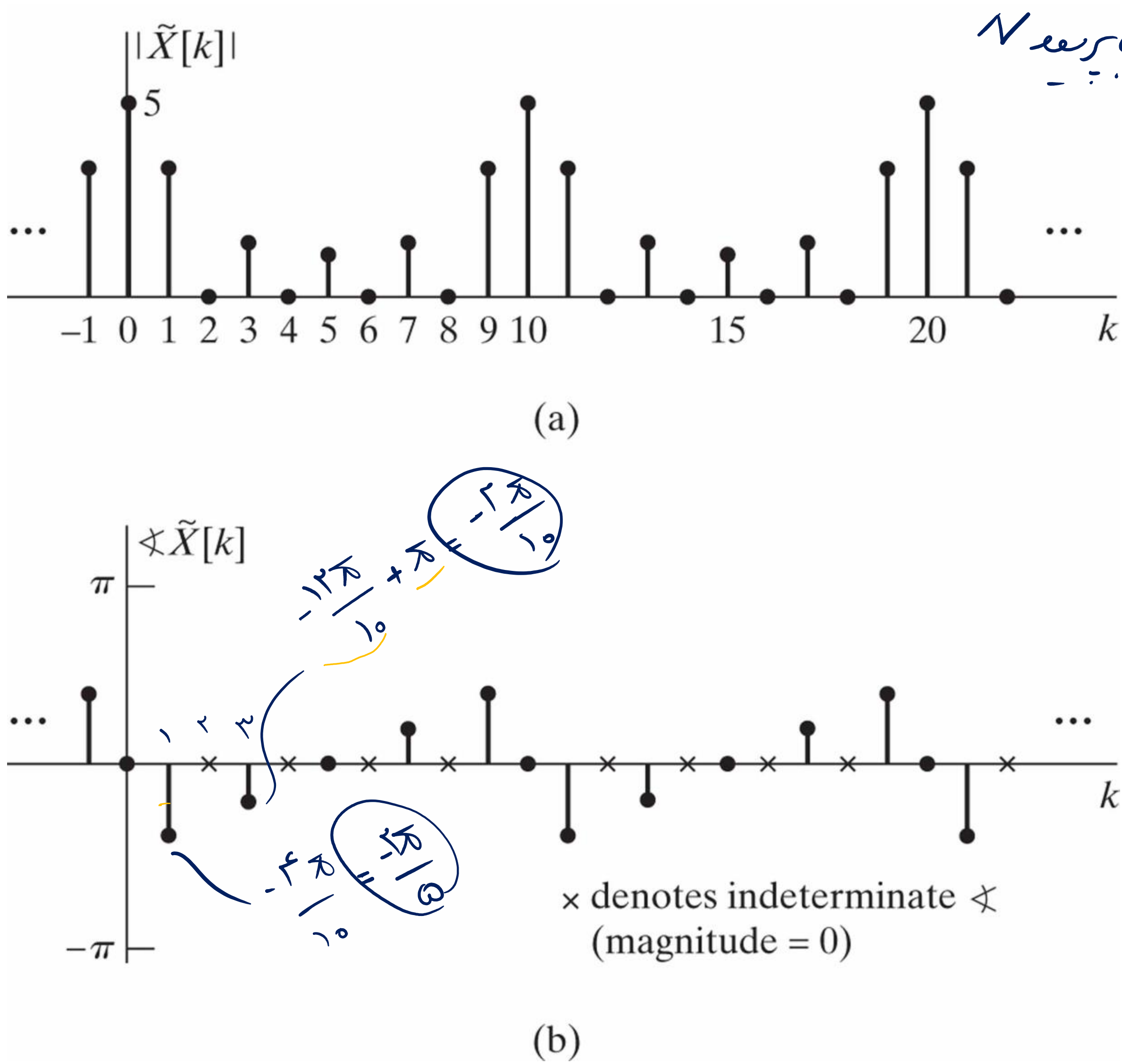


Figure 8.2 Magnitude and phase of the Fourier series coefficients of the sequence of Figure 8.1.

$\tilde{X}[k]$ پریودیک با پریود N



8.2.5

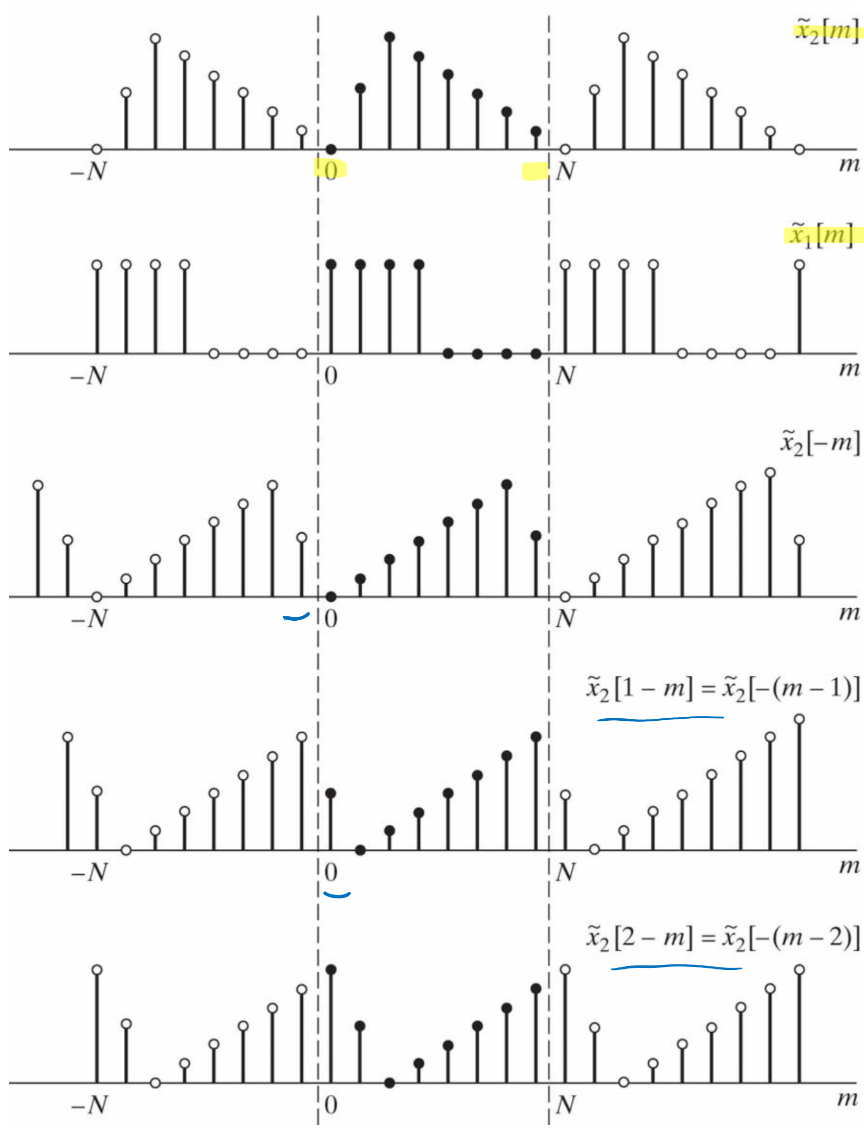
کانولوشن پریودیک

Figure 8.3 Procedure for forming the periodic convolution of two periodic sequences.

$$\tilde{x}_3[n] = \sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m]\,\tilde{x}_2[n-m]$$

$\updownarrow$ DFS

$$\tilde{X}_3[k] = \tilde{X}_1[k]\,\tilde{X}_2[k]$$



قرینه

انتقال به اندازهٔ n

8.2 ویژگی های سری فوریه گسسته DFS:

$W_N = e^{-j(\frac{2\pi}{N})}$

Table 8.1 SUMMARY OF PROPERTIES OF THE DFS

TABLE 8.1 SUMMARY OF PROPERTIES OF THE DFS

		Periodic Sequence (Period N)	DFS Coefficients (Period N)
	1.	$\tilde{x}[n]$	$\tilde{X}[k]$ periodic with period N
	2.	$\tilde{x}_1[n], \tilde{x}_2[n]$	$\tilde{X}_1[k], \tilde{X}_2[k]$ periodic with period N
خطی	3.	$a\tilde{x}_1[n] + b\tilde{x}_2[n]$	$a\tilde{X}_1[k] + b\tilde{X}_2[k]$
دوگانی	4.	$\tilde{X}[n]$	$N\tilde{x}[-k]$
انتقال	5.	$\tilde{x}[n-m]$	$W_N^{km}\tilde{X}[k]$
انتقال در DFS	6.	$W_N^{-\ell n}\tilde{x}[n]$	$\tilde{X}[k-\ell]$
کانولوشن پریودیک	7.	$\sum_{m=0}^{N-1} \tilde{x}_1[m]\tilde{x}_2[n-m]$ (periodic convolution)	$\tilde{X}_1[k]\tilde{X}_2[k]$
ضرب	8.	$\tilde{x}_1[n]\tilde{x}_2[n]$	$\frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{N-1} \tilde{X}_1[\ell]\tilde{X}_2[k-\ell]$ (periodic convolution)
تقارن	9.	$\tilde{x}^*[n]$	$\tilde{X}^*[-k]$
	10.	$\tilde{x}^*[-n]$	$\tilde{X}^*[k]$

Table 8.1 (continued) SUMMARY OF PROPERTIES OF THE DFS

11. $\mathcal{R}e\{\tilde{x}[n]\}$	$\tilde{X}_e[k] = \frac{1}{2}(\tilde{X}[k] + \tilde{X}^*[-k])$
12. $j\mathcal{I}m\{\tilde{x}[n]\}$	$\tilde{X}_o[k] = \frac{1}{2}(\tilde{X}[k] - \tilde{X}^*[-k])$
13. $\tilde{x}_e[n] = \frac{1}{2}(\tilde{x}[n] + \tilde{x}^*[-n])$	$\mathcal{R}e\{\tilde{X}[k]\}$
14. $\tilde{x}_o[n] = \frac{1}{2}(\tilde{x}[n] - \tilde{x}^*[-n])$	$j\mathcal{I}m\{\tilde{X}[k]\}$
Properties 15–17 apply only when $x[n]$ is real.	
15. Symmetry properties for $\tilde{x}[n]$ real.	$\begin{cases} \tilde{X}[k] = \tilde{X}^*[-k] \\ \mathcal{R}e\{\tilde{X}[k]\} = \mathcal{R}e\{\tilde{X}[-k]\} \\ \mathcal{I}m\{\tilde{X}[k]\} = -\mathcal{I}m\{\tilde{X}[-k]\} \\ \lvert\tilde{X}[k]\rvert = \lvert\tilde{X}[-k]\rvert \\ \angle\tilde{X}[k] = -\angle\tilde{X}[-k] \end{cases}$ قسمت حقیقی زوج 〃 موهومی فرد اندازه زوج فاز فرد
زوج 16. $\tilde{x}_e[n] = \frac{1}{2}(\tilde{x}[n] + \tilde{x}[-n])$	$\mathcal{R}e\{\tilde{X}[k]\}$
فرد 17. $\tilde{x}_0[n] = \frac{1}{2}(\tilde{x}[n] - \tilde{x}[-n])$	$j\mathcal{I}m\{\tilde{X}[k]\}$

8.3 : تبدیل فوریه سیگنالهای پریودیک :

فاصله ضربه ها $\frac{2\pi}{N}$

DTFT :
$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi}{N}\tilde{X}[k]\,\delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$$

تبدیل فوریه زمان گسسته

پریودیک با پریود 2π

ضرایب سری فوریه

پریودیک با پریود N

$$\tilde{x}[n] \xleftrightarrow{DFS} \tilde{X}[k]$$

دنباله با پریود N

مثال :

$$\tilde{p}[n] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \delta[n-rN]$$

قطار ضربه پریودیک با پریود N

DTFT $\tilde{P}(e^{j\omega}) = ?$

$$\tilde{P}[k] = 1 \;;\; \forall k$$

$$\Rightarrow \tilde{P}(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi}{N}\,\delta\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$$

رابطهٔ بین سیگنال پریودیک و سیگنال با طول محدود:

قطار ضربه

$$\tilde{x}[n] = \underline{x[n]} * \tilde{p}[n]$$

$$= x[n] * \sum_{r=-\infty}^{+\infty} \delta[n-rN] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[n-rN]$$

یادآوری:

$$x[n]\,\delta[n-n_0] = x[n_0]\,\delta[n-n_0]$$

$$x[n] * \delta[n-n_0] = x[n-n_0]$$

DTFT

$$x[n] \xleftrightarrow{\text{DTFT}} X(e^{j\omega})$$

گسسته   پیوسته

$$\tilde{X}(e^{j\omega}) = \underline{X(e^{j\omega})}\,\tilde{P}(e^{j\omega})$$

$$= X(e^{j\omega}) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi}{N}\,\delta\!\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$$

$$\Rightarrow \tilde{X}(e^{j\omega}) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{2\pi}{N} \underbrace{X\!\left(e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)k}\right)}_{\tilde{X}[k]} \delta\!\left(\omega - \frac{2\pi k}{N}\right)$$

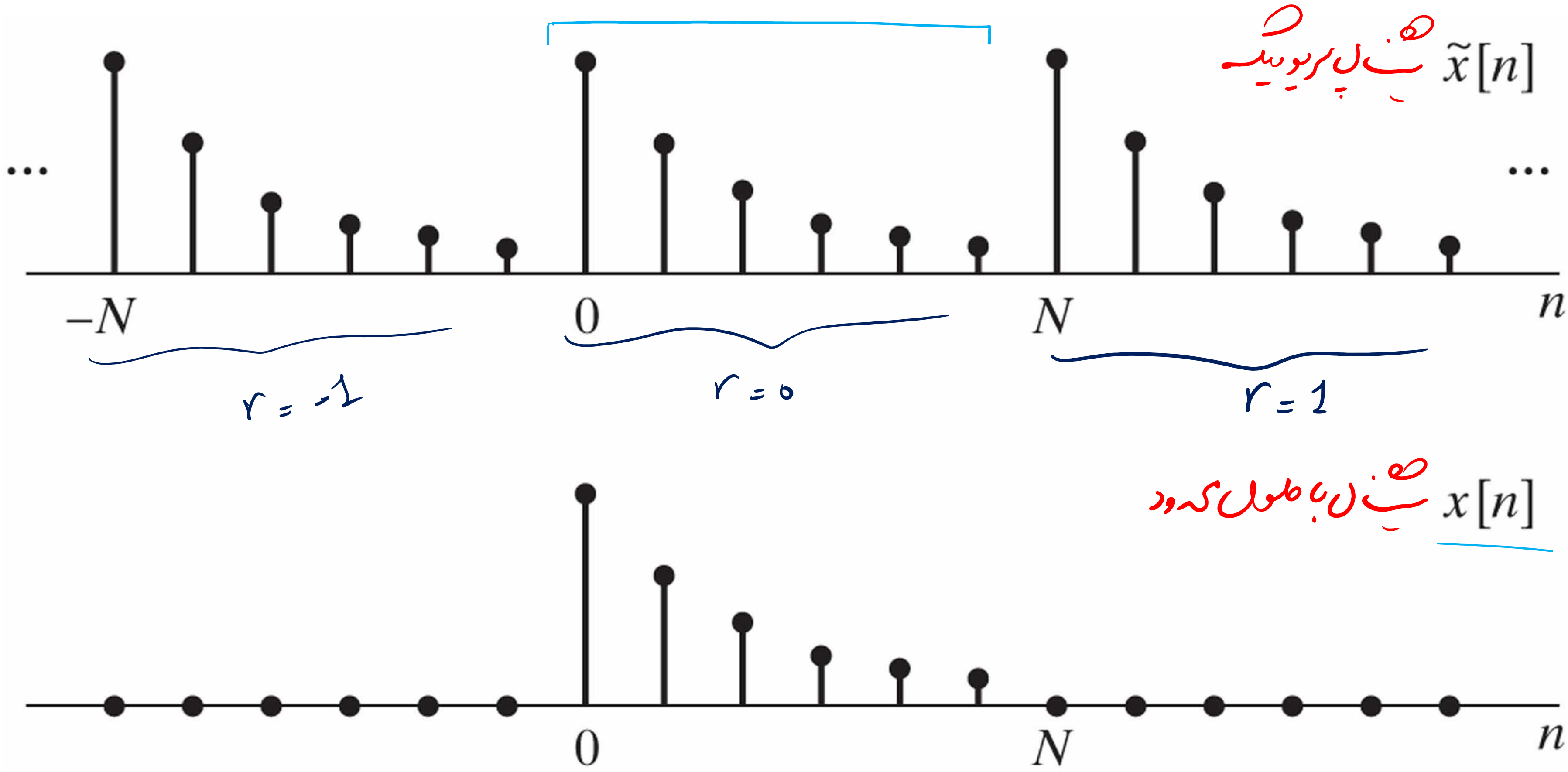
مهم

$$\tilde{X}[k] = X\!\left(e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)k}\right) = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega = \left(\frac{2\pi}{N}\right)k}$$

$$x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n] & ; \quad 0 \le n \le N-1 \\ 0 & ; \quad o.w. \end{cases}$$

$\tilde{X}[k]$ نمونه برداری شدهٔ $X(e^{j\omega})$ با گام‌های فرکانسی $\frac{2\pi}{N}$ در بازهٔ $0 \le \omega < 2\pi$ است.

Figure 8.4 Periodic sequence $\tilde{x}[n]$ formed by repeating a finite-length sequence, $x[n]$, periodically. Alternatively, $x[n] = \tilde{x}[n]$ over one period and is zero otherwise.



مثال:

Figure 8.5 Magnitude and phase of the Fourier transform of one period of the sequence in Figure 8.1.

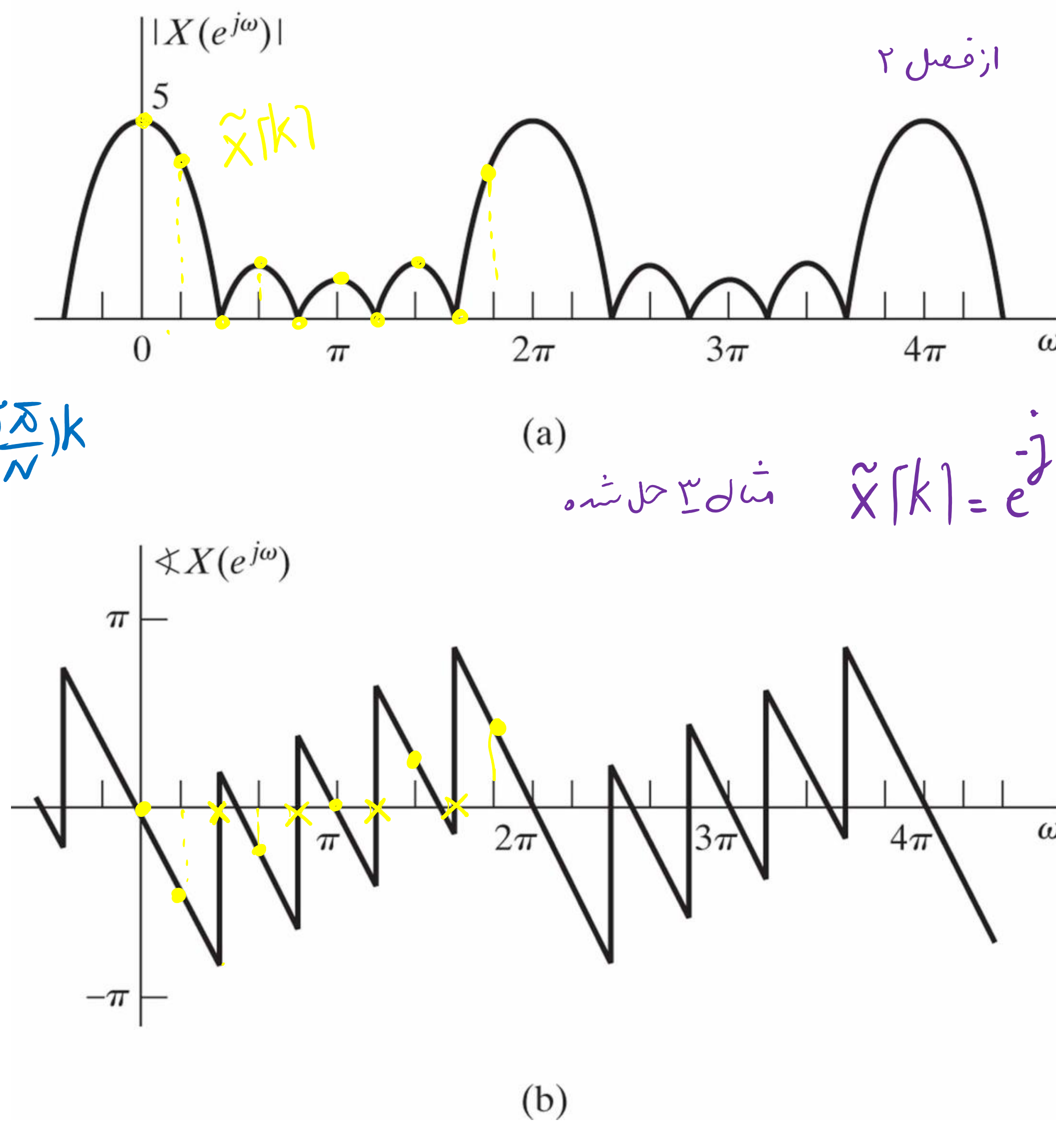
$x[n] \xleftrightarrow{DTFT} X(e^{j\omega})$

$\tilde{x}[n] \xleftrightarrow{DFS} \tilde{X}[k]$

$\tilde{X}[k] = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=(\frac{2\pi}{N})k}$

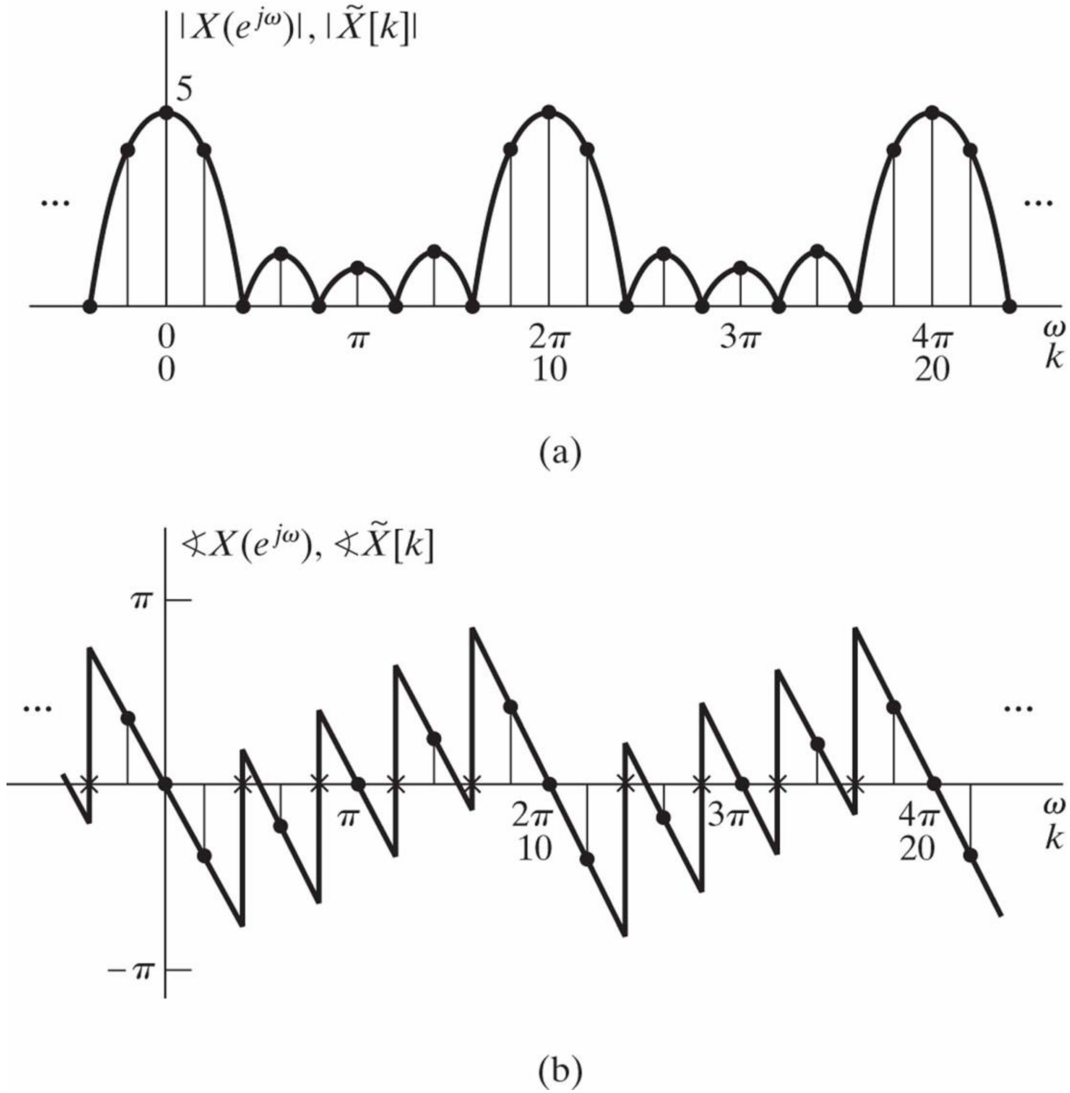
از فصل ۲ $\quad X(e^{j\omega}) = e^{-j2\omega}\dfrac{\sin(\frac{5\omega}{2})}{\sin(\frac{\omega}{2})}$

$\omega = \dfrac{2\pi}{10}k$



مثال ۳ حل شده $\quad \tilde{X}[k] = e^{-j(\frac{4\pi k}{10})}\dfrac{\sin(\frac{\pi k}{2})}{\sin(\frac{\pi k}{10})}$

Figure 8.6 Overlay of Figures 8.2 and 8.5 illustrating the DFS coefficients of a periodic sequence as samples of the Fourier transform of one period.



8.4 نمونه برداری تبدیل فوریه :

$$\tilde{X}[k] = X(e^{j\omega})\Big|_{\omega=(\frac{2\pi}{N})k} = X\left(e^{j(\frac{2\pi}{N})k}\right)$$

رابطه بین تبدیل فوریه و Z
فصل ۳

$$\tilde{X}[k] = X(z)\Big|_{z=e^{j(\frac{2\pi}{N})k}} = X\left(e^{j(\frac{2\pi}{N})k}\right)$$

یا $z = W_N^{-k}$

روی دایره واحد

$$\begin{cases} x[n] \overset{Z}{\longleftrightarrow} X(z) \\ \tilde{x}[n] \overset{DFS}{\longleftrightarrow} \tilde{X}[k] \end{cases}$$

نکته :

$$\begin{tikzcd} x[n] \arrow[r, leftrightarrow, "DTFT"] \arrow[d, "\text{پریودیک با پریود } N"'] & X(e^{j\omega}) \arrow[d, "\text{نمونه برداری}"] \\ \tilde{x}[n] \arrow[r, leftrightarrow, "DFS"] & \tilde{X}[k] \end{tikzcd}$$

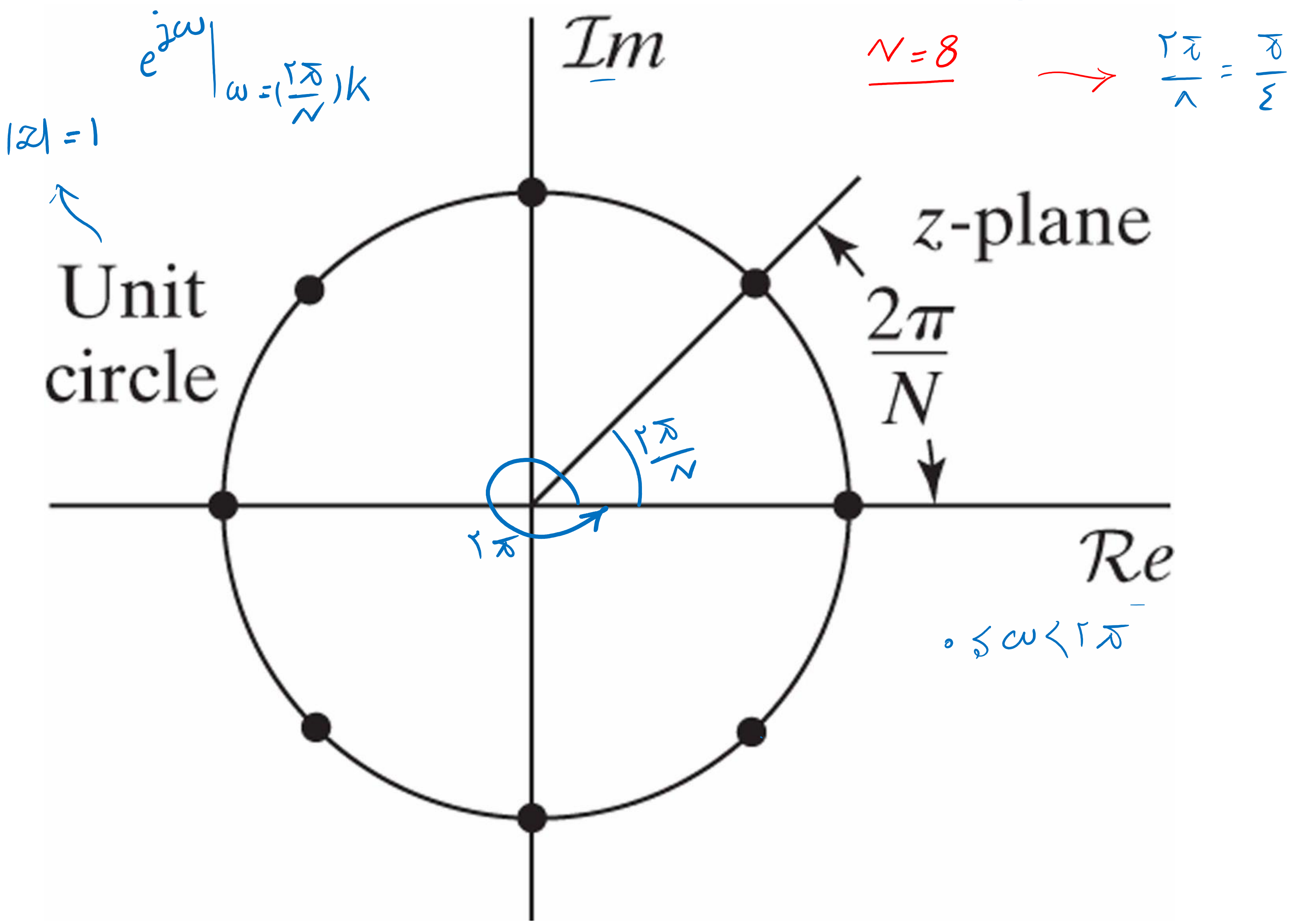
نمونه برداری در حوزه زمان
فرکانس

فصل ۴ DSP
قضیه نایکوئیست

پریودیک سازی در حوزه فرکانس
زمان

ایده DFT: از $X(e^{j\omega})$ که یک تابع پیوسته است، نمونه برداری کرده و بدون از دست رفتن اطلاعات از آن به عنوان نمایش حوزه فرکانس استفاده کنیم.

Figure 8.7 Points on the unit circle at which $X(z)$ is sampled to obtain the periodic sequence $\tilde{X}[k]$ ($N = 8$).



نحوهٔ به دست آوردن $\tilde{x}[n]$ از $x[n]$:

$$\boxed{\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[n-rN]}$$

پریودیک با پریود N

آیا با دانستن $\tilde{x}[n]$ می توان $x[n]$ را به دست آورد ؟

تحت شرایط زیر این امکان وجود دارد :

۱- $x[n]$ دنباله با طول محدود باشد. $0 \leq n \leq M$

Finite length

۲- $N > M$ باشد.

در این صورت :

$$\boxed{x[n] = \tilde{x}[n] \; ; \quad 0 \leq n \leq N-1}$$

Figure 8.8 (a) Finite-length sequence $x[n]$. (b) Periodic sequence $\tilde{x}[n]$ corresponding to sampling the Fourier transform of $x[n]$ with $\boxed{N = 12.}$

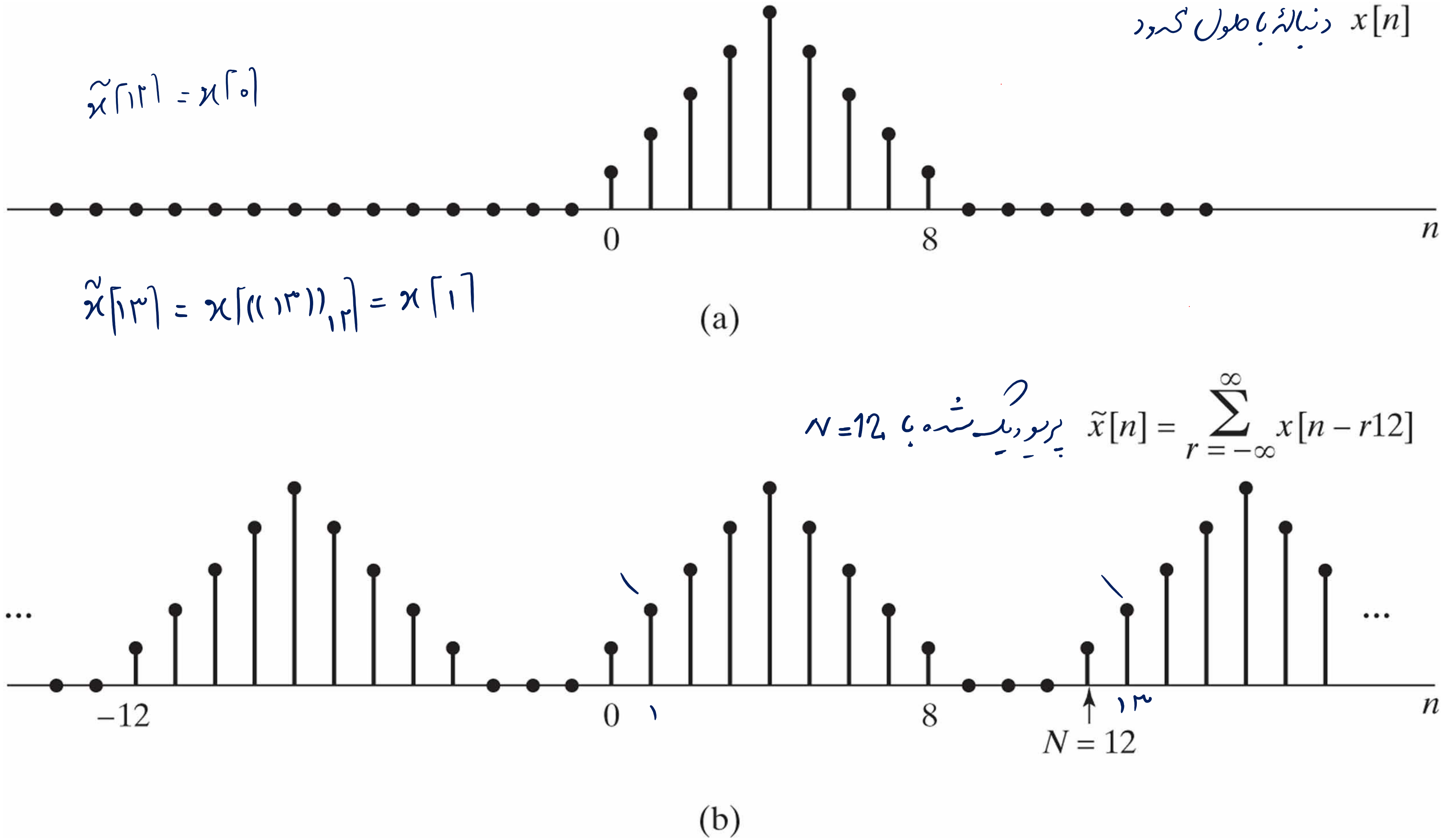
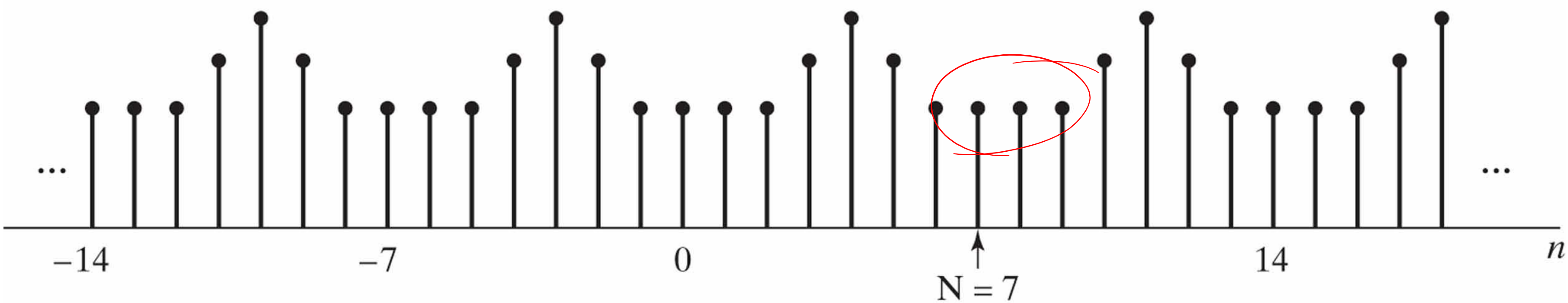


Figure 8.9 Periodic sequence $\tilde{x}[n]$ corresponding to sampling the Fourier transform of $x[n]$ in Figure 8.8(a) with $N = 7$.

$N < M$

$N = 8$ پریودیک شده با

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{\infty} x[n - r7]$$



8.5 نمایش فوریه دنباله با طول محدود : DFT

تبدیل فوریه گسسته Discrete Fourier Transform

* با فرض برقراری شرایط گفته شده: دنباله با طول محدود , $N \geq M$

x[n] غیرپریودیک با طول محدود $0 \leq n \leq M$

X(e^{jω}) پریودیک با 2π

$$
\begin{tikzcd}
x[n] \arrow[r, leftrightarrow, "DTFT"] \arrow[d, "\text{پریودیک با پریود } N"'] \arrow[dr, leftrightarrow, "DFT"] & X(e^{j\omega}) \arrow[d, "\text{نمونه برداری}"] \\
\tilde{x}[n] \arrow[r, leftrightarrow, "DFS", "\text{با پریود } N"'] & \tilde{X}[k]
\end{tikzcd}
$$

X̃[k] پریودیک با N ، $0 \leq k \leq N-1$

$$\tilde{x}[n] = \sum_{r=-\infty}^{+\infty} x[n - rN] \quad , \quad x[n] = \begin{cases} \tilde{x}[n] ; & 0 \leq n \leq N-1 \\ 0 ; & o.w. \end{cases}$$

$$\tilde{x}[n] = x[(n \text{ modulo } N)] = x[((n))_N]$$

باقیمانده

$$X[k] = \begin{cases} \tilde{X}[k] ; & 0 \leq k \leq N-1 \\ 0 ; & o.w. \end{cases}$$

DFT

$$\tilde{X}[k] = X[((k))_N]$$

روابط سنتز و آنالیز DFT :

رابطه آنالیز :
$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\, W_N^{kn}, \quad 0 \leq k \leq N-1$$

$$W_N = e^{-j\left(\frac{2\pi}{N}\right)}$$

رابطه سنتز :
$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k]\, W_N^{-kn}; \quad 0 \leq n \leq N-1$$

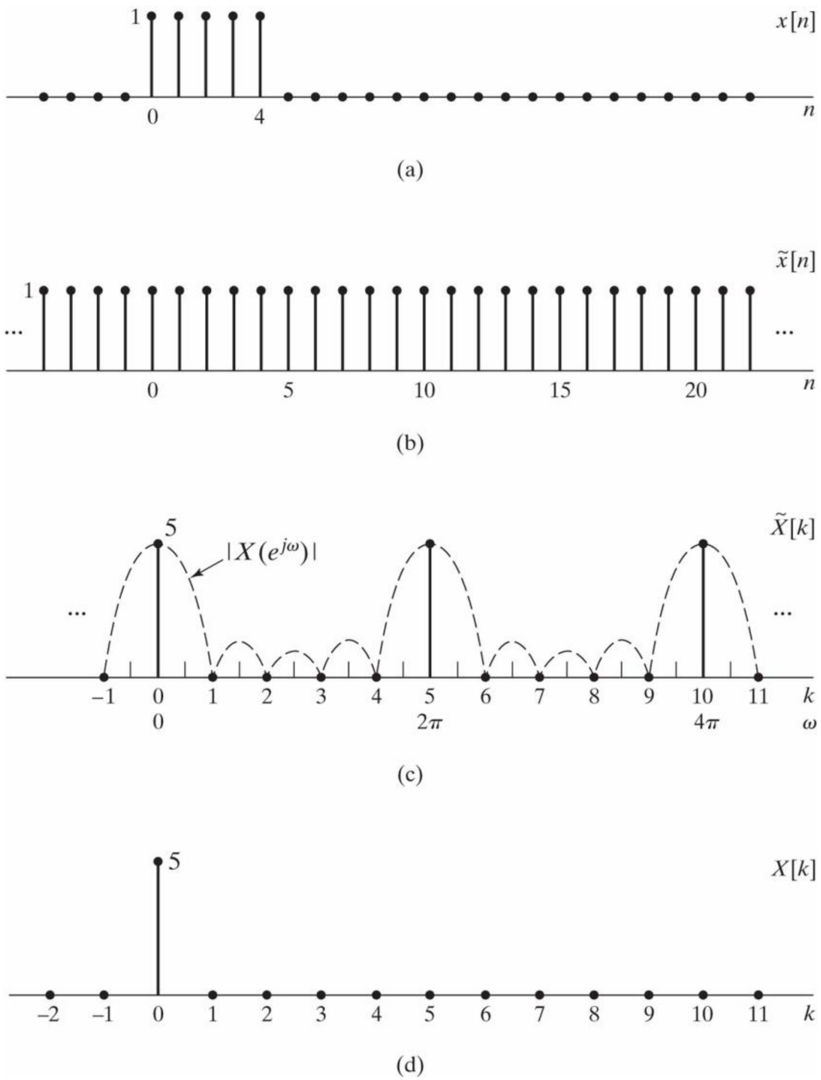
$$x[n] \xleftrightarrow[N \text{ نقطه‌ای}]{DFT} X[k]$$

مثال : DFT شکل زمان گسسته پالس مستطیلی را به دست آورید:

Fig 8.10 : DFT ؛ $\underline{N=5}$ برابر با طول شکل

Fig 8.11 : 〃 〃 $\underline{N=10}$

Figure 8.10 Illustration of the DFT. (a) Finite-length sequence $x[n]$. (b) Periodic sequence $\tilde{x}[n]$ formed from $x[n]$ with period $N = 5$. (c) Fourier series coefficients $\tilde{X}[k]$ for $\tilde{x}[n]$. To emphasize that the Fourier series coefficients are samples of the Fourier transform, $|X(e^{j\omega})|$ is also shown. (d) DFT of $x[n]$.

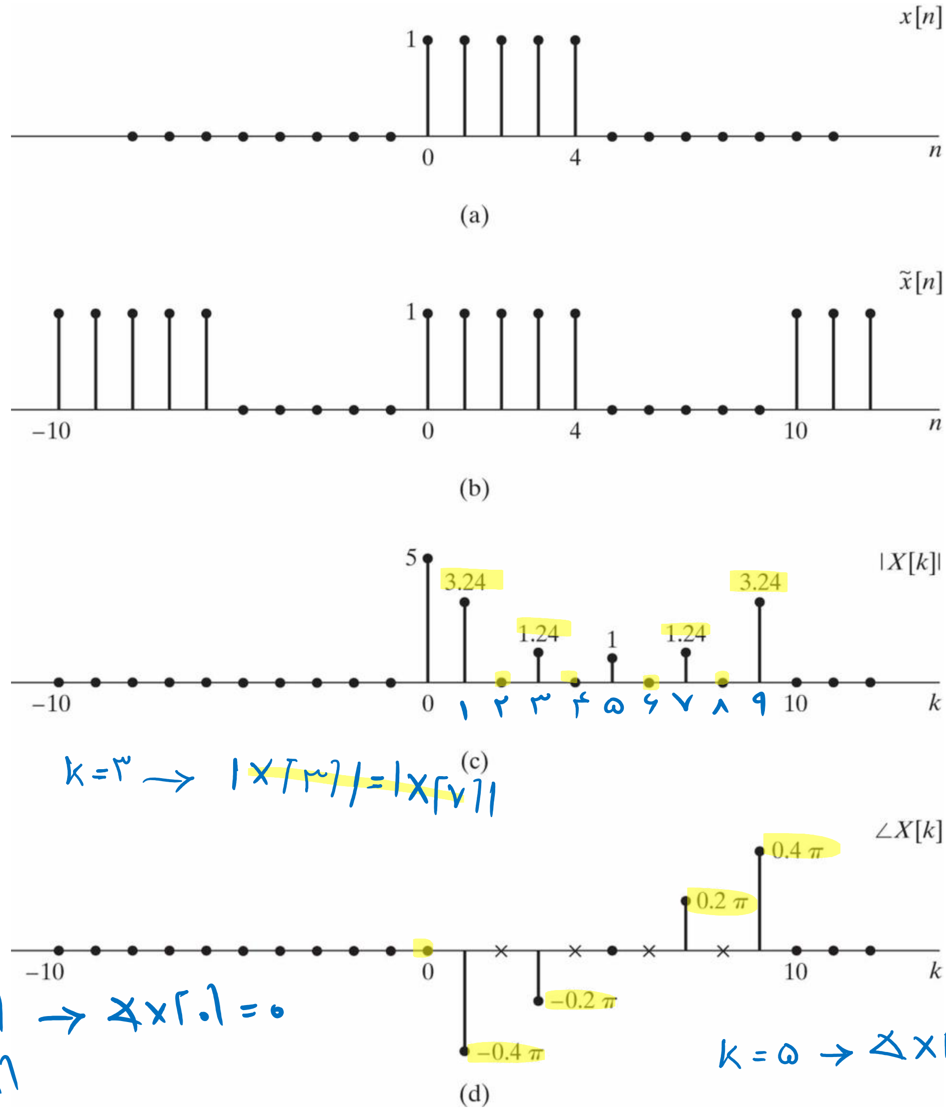


$N = 5$

Figure 8.11 Illustration of the DFT. (a) Finite-length sequence $x[n]$. (b) Periodic sequence $\tilde{x}[n]$ formed from $x[n]$ with period $N = 10$. (c) DFT magnitude. (d) DFT phase. (x's indicate indeterminate values.)

بررسی ویژگی‌های تقارن برای دنباله حقیقی $x[n]$:

$N=10$



$|X[k]|$

$|X[k]| = |X[((-k))_N]|$

$k=0 \rightarrow |X[0]| = |X[0]|$ ✓

$k=1 \rightarrow |X[1]| = |X[9]|$

$k=3 \rightarrow |X[3]| = |X[7]|$

$\measuredangle X[k]$

$\measuredangle X[k] = -\measuredangle X[((-k))_N]$

$k=0 \rightarrow \measuredangle X[0] = -\measuredangle X[0] \rightarrow \measuredangle X[0] = 0$

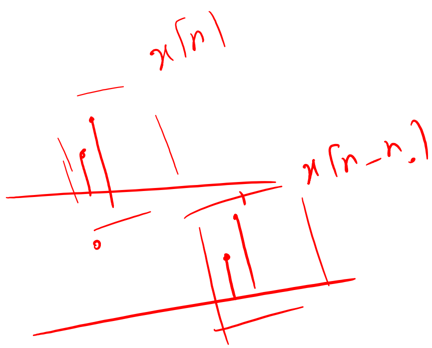
$k=1 \rightarrow \measuredangle X[1] = -\measuredangle X[9]$

$k=5 \rightarrow \measuredangle X[5] = -\measuredangle X[5] \rightarrow \measuredangle X[5] = 0$

8.6 ویژگی های تبدیل DFT :

جدول 8.1 : ویژگی های DFS

" 8.2 : " DFT



۱- خطی بودن

۲- انتقال چرخشی

circular shift

در مقابل linear shift

$x[n]$ ؛ $0 \le n \le N-1$

و بعد از انتقال نیز باید در این بازه قرار گیرد:

$$x[n] \overset{DFT}{\longleftrightarrow} X[k]$$

$$\underbrace{x[((n-m))_N]} \overset{DFT}{\longleftrightarrow} W_N^{km} X[k]$$

رابطه (87) W_N^{km} اصلاح شود

۳- دوگانی Duality

$$x[n] \overset{DFT}{\longleftrightarrow} X[k] \quad ; \quad 0 \le k \le N-1$$

$$X[n] \overset{DFT}{\longleftrightarrow} N x[((-k))_N] \quad ; \quad 0 \le k \le N-1$$

۴- ویژگی های تقارن :

$0 \leq n \leq N-1 \qquad x[n] \xleftrightarrow{DFT} X[k] \qquad 0 \leq k \leq N-1$

$0 \leq n \leq N-1 \qquad x^*[n] \xleftrightarrow{DFT} X^*[((-k))_N] \qquad 0 \leq k \leq N-1$

و

$x^*[((-n))_N] \xleftrightarrow{DFT} X^*[k] \qquad 0 \leq k \leq N-1$

نتیجه ها :

$$\tilde{x}[n] = x[((n))_N]$$

conjugate-symmetric: $\tilde{x}_e[n] = \frac{1}{2}\left(\tilde{x}[n] + \tilde{x}^*[-n]\right)$

Conjugate-antisymmetric: $\tilde{x}_o[n] = \frac{1}{2}\left(\tilde{x}[n] - \tilde{x}^*[-n]\right)$

دنباله های با طول محدود

$$\begin{cases} x_{ep}[n] = \tilde{x}_e[n] \ ; & 0 \leq n \leq N-1 \\ x_{op}[n] = \tilde{x}_o[n] \ ; & 0 \leq n \leq N-1 \end{cases}$$

$x_{ep}[n] \xleftrightarrow{DFT} \mathrm{Re}\{X[k]\}$, $\mathrm{Re}\{x[n]\} \xleftrightarrow{DFT} X_{ep}[k]$

$x_{op}[n] \xleftrightarrow{DFT} j\mathrm{Im}\{X[k]\}$, $j\mathrm{Im}\{x[n]\} \xleftrightarrow{DFT} X_{op}[k]$

6.5 کانولوشن چرخشی : circular convolution

$$x_3[n] = x_1[n] \; N \; x_2[n]$$

نماد کانولوشن چرخشی N نقطه‌ای

N-point circular convolution

$$x_3[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x_1[k]\, x_2[((n-k))_N]$$

دو تفاوت: ۱- در بازهٔ ۰ تا $N-1$
۲- شیفت چرخشی

مثال: $x_1[n] = \delta[n-n_0]$

$x_2[n]$ دنباله با طول محدود شکل Fig 8.14

مثال: کانولوشن چرخشی دو دنبالهٔ پالس مستطیلی طول محدود

Fig 8.15

انتقال چرخشی :

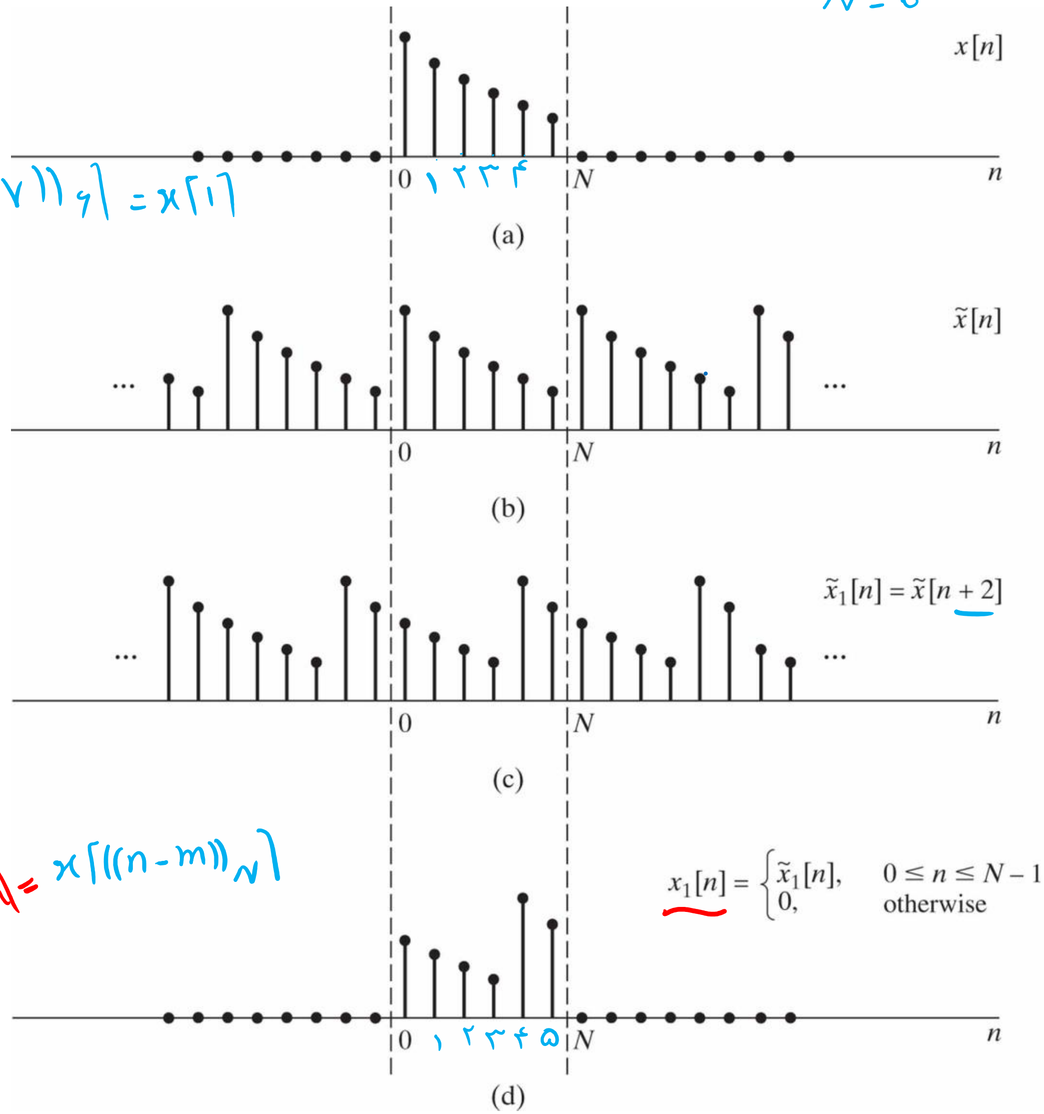
Figure 8.12 Circular shift of a finite-length sequence; i.e., the effect in the time domain of multiplying the DFT of the sequence by a linear-phase factor.

$N = 6$

$x[((n-m))_N]$

$x[((۵+۲))_۶] = x[((۷))_۶] = x[۱]$

$x[((۲+۲))_۶] = x[۴]$



پریودیک

shift

$m = -۲$

$x_1[n] = x[((n-m))_N]$

یک پریود

دوگانی :

Figure 8.13 Illustration of duality. (a) Real finite-length sequence $x[n]$. (b) and (c) Real and imaginary parts of corresponding DFT $X[k]$. (d) and (e) The real and imaginary parts of the dual sequence $x_1[n] = X[n]$. (f) The DFT of $x_1[n]$.

$N = 10$

$x[n] \xrightarrow{DFT} X[k]$

$Re\{X[k]\} = Re\{X[((-k))_N]\}$ حقیقی

$Im\{X[k]\} = -Im\{X[((-k))_N]\}$ موهومی

$X[n] \xrightarrow{DFT} N x[((-k))_N]$

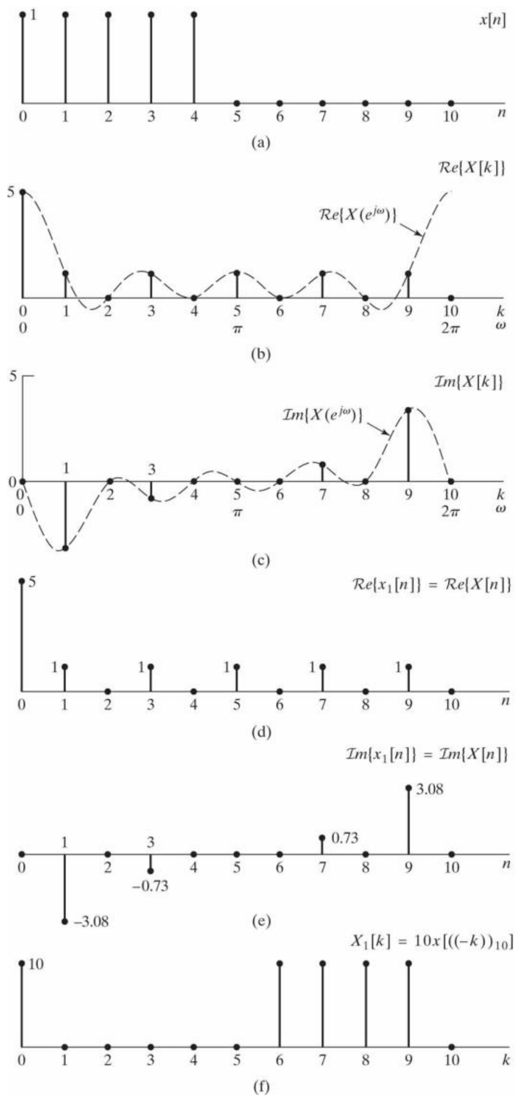
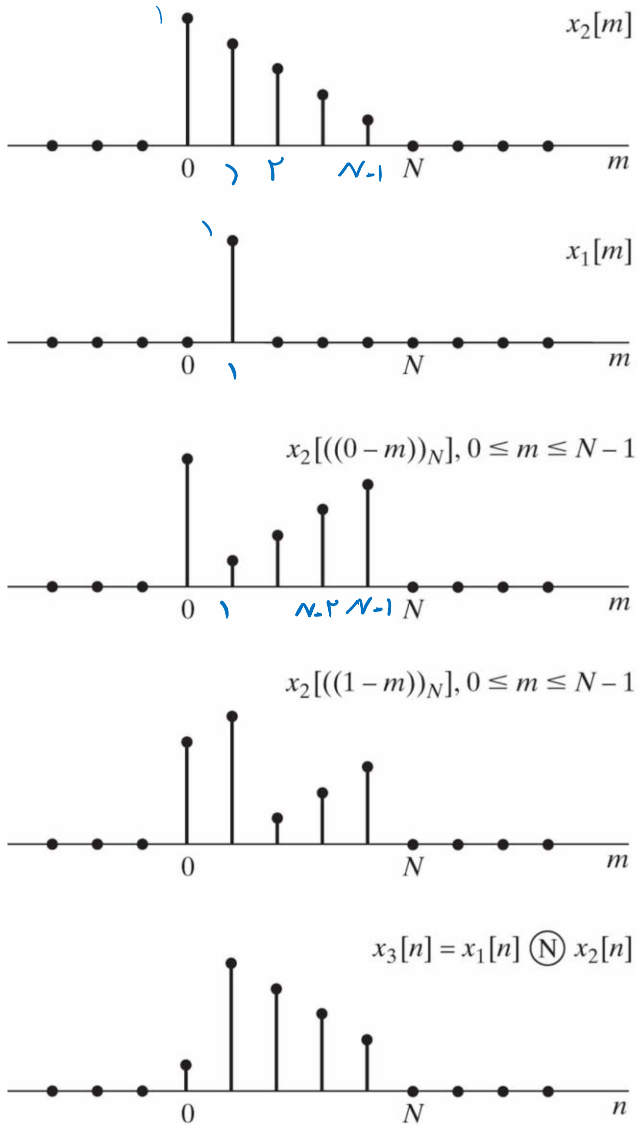


Figure 8.14 Circular convolution of a finite-length sequence $x_2[n]$ with a single delayed impulse, $x_1[n] = \delta[n-1]$.

$x_3[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x_1[k]\, x_2[((n-k))_N]$

$0 \le n \le N-1$



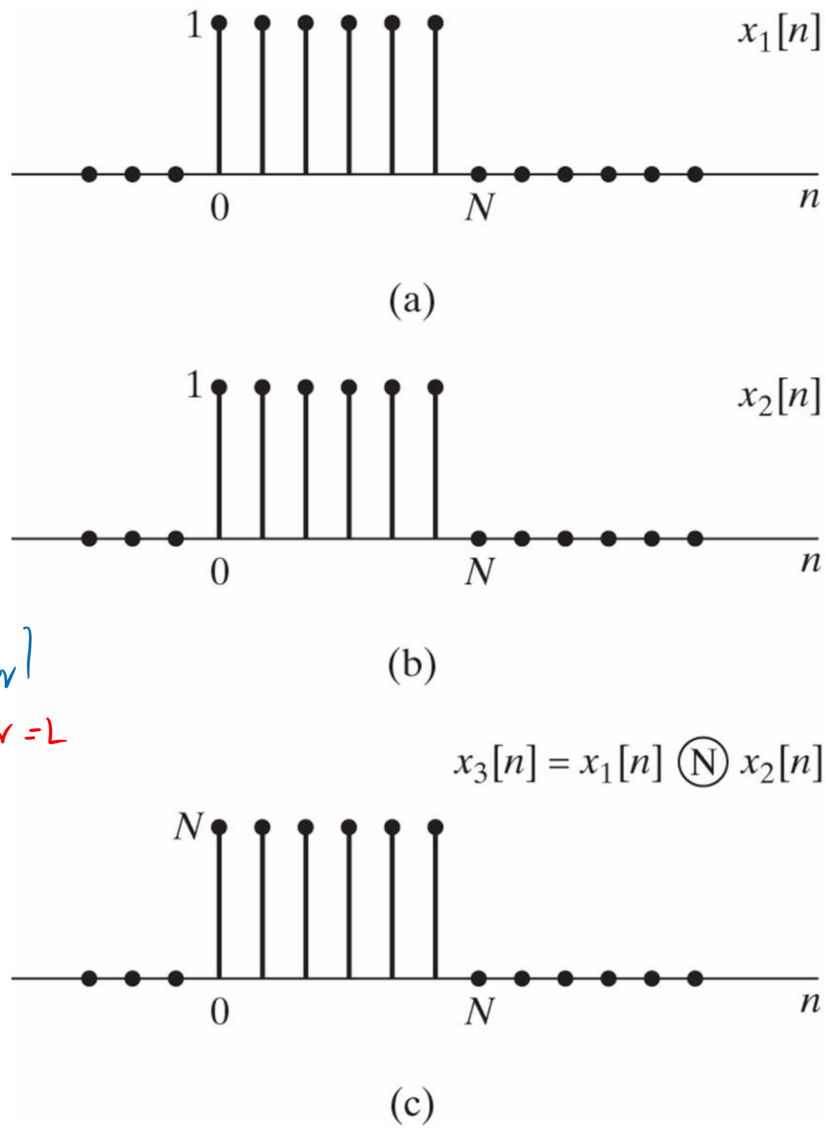
$= \delta[n-1]$

بدون شیفت $n = 0$

شیفت به اندازه $n = 1$

حاصل کانولوشن

Figure 8.15 *N*-point circular convolution of two constant sequences of length *N*.



پالس مستطیلی

$$x_3[n] = \sum_{k=0}^{N-1} x_1[k]\, x_2[((n-k))_N]$$

if $N = L$

$= x_1[k]$

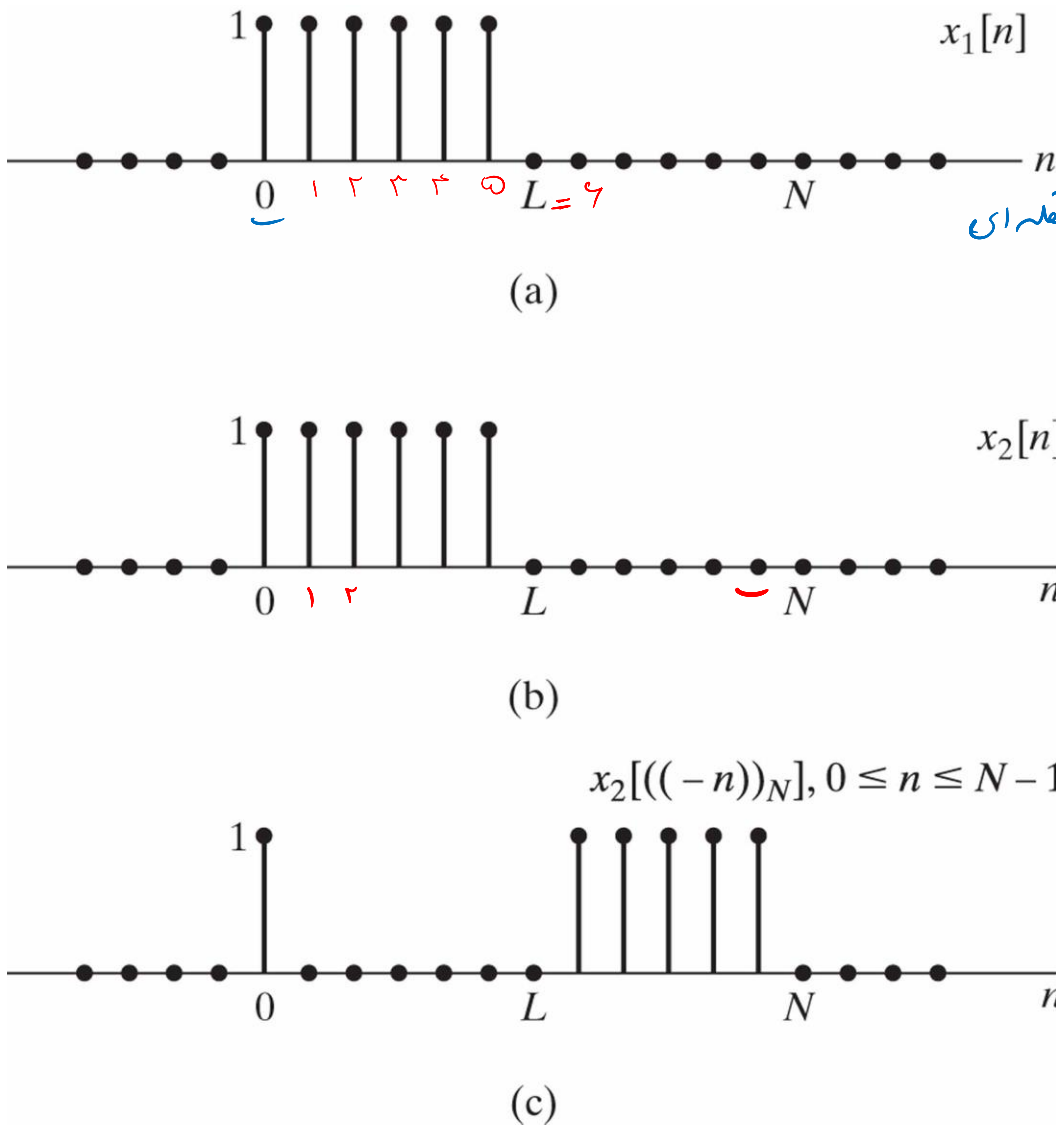
1

کانولوشن چرخشی :

$N = L$

طول سیگنال

Figure 8.16 2L-point circular convolution of two constant sequences of length L.



$N = ۲L$

کانولوشن چرخشی ۲L نقطه‌ای

$۰ \le n \le ۲L-۱$

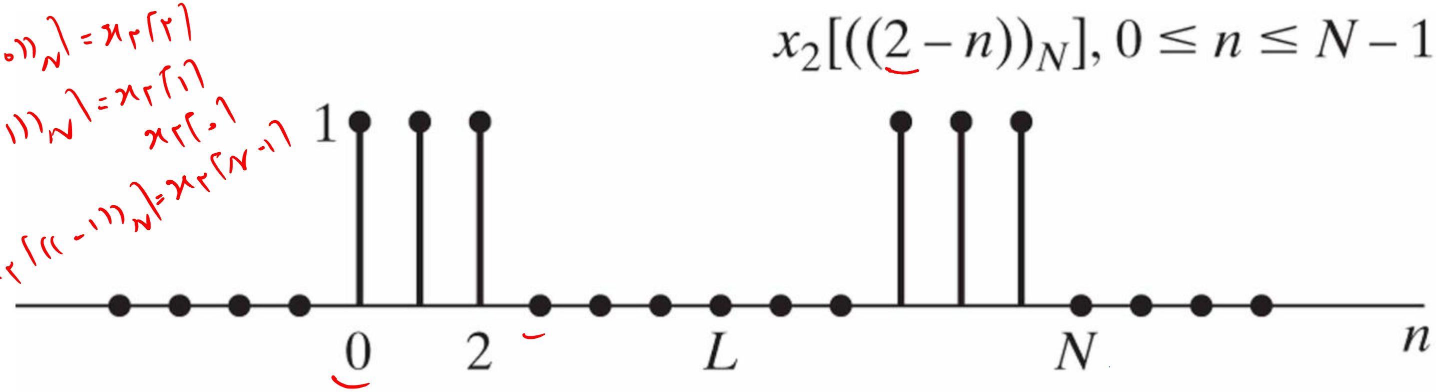
Figure 8.16 (continued) 2L-point circular convolution of two constant sequences of length L.

$n=0$ $x_2[((2-0))_N] = x_2[2]$

$n=1$ $x_2[((1))_N] = x_2[1]$

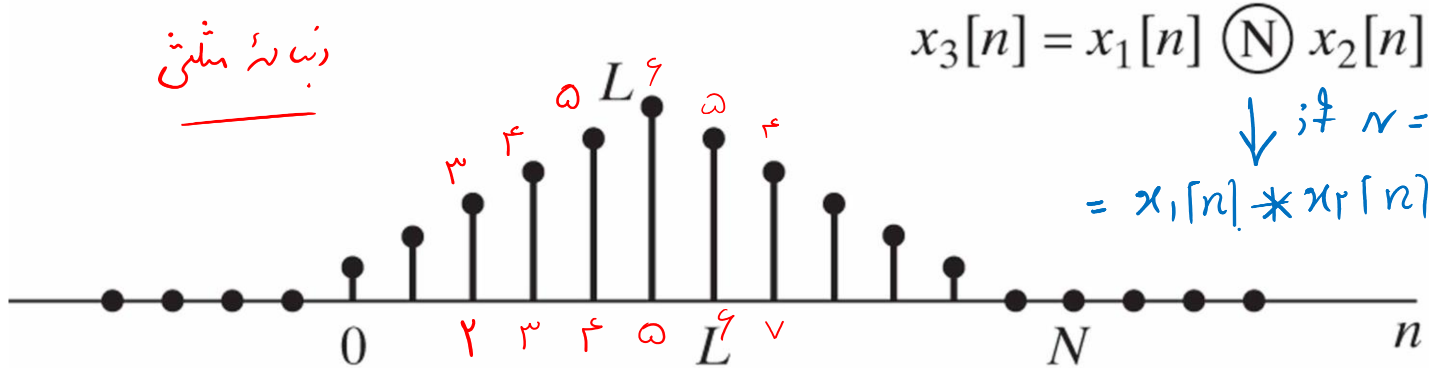
$n=2$ $x_2[0]$

$n=3$ $x_2[((-1))_N] = x_2[N-1]$



(d)

دنباله مثلثی



$\downarrow$ if $N = 2L$

$= x_1[n] * x_2[n]$

نکته: کانولوشن چرخشی به ازای N های مختلف پاسخ های مختلفی می دهد.

با انتخاب N برابر با 2L کانولوشن چرخشی به خطی تبدیل می شود.

(e)

Table 8.2 SUMMARY OF PROPERTIES OF THE DFT

TABLE 8.2 SUMMARY OF PROPERTIES OF THE DFT

$X[k]\ ;\ 0 \le k \le N-1$

$x[n]\ ;\ 0 \le n \le N-1$

		Finite-Length Sequence (Length N)	N-point DFT (Length N)
	1.	$x[n]$	$X[k]$
	2.	$x_1[n], x_2[n]$	$X_1[k], X_2[k]$
خطی بودن	3.	$ax_1[n] + bx_2[n]$	$aX_1[k] + bX_2[k]$
دوگانی	4.	$X[n]$	$Nx[((-k))_N]$
انتقال چرخشی	5.	$x[((n-m))_N]$	$W_N^{km} X[k]$
انتقال فرکانسی	6.	$W_N^{-\ell n} x[n]$	$X[((k-\ell))_N]$
کانولوشن چرخشی	7.	$\sum_{m=0}^{N-1} x_1[m]x_2[((n-m))_N]$	$X_1[k]X_2[k]$
ضرب	8.	$x_1[n]x_2[n]$	$\frac{1}{N}\sum_{\ell=0}^{N-1} X_1[\ell]X_2[((k-\ell))_N]$
تقارن	9.	$x^*[n]$	$X^*[((-k))_N]$
تقارن	10.	$x^*[((-n))_N]$	$X^*[k]$

Table 8.2 (continued) SUMMARY OF PROPERTIES OF THE DFT

نتایج قضیه تقارن :

11.	$\mathcal{R}e\{x[n]\}$	$X_{\text{ep}}[k] = \frac{1}{2}\{X[((k))_N] + X^*[((-k))_N]\}$
12.	$j\mathcal{I}m\{x[n]\}$	$X_{\text{op}}[k] = \frac{1}{2}\{X[((k))_N] - X^*[((-k))_N]\}$
13.	$x_{\text{ep}}[n] = \frac{1}{2}\{x[n] + x^*[((-n))_N]\}$	$\mathcal{R}e\{X[k]\}$
14.	$x_{\text{op}}[n] = \frac{1}{2}\{x[n] - x^*[((-n))_N]\}$	$j\mathcal{I}m\{X[k]\}$

Properties 15–17 apply only when $x[n]$ is real.

حقیقی

15. Symmetry properties

$$\begin{cases} X[k] = X^*[((-k))_N] \\ \mathcal{R}e\{X[k]\} = \mathcal{R}e\{X[((-k))_N]\} \\ \mathcal{I}m\{X[k]\} = -\mathcal{I}m\{X[((-k))_N]\} \\ |X[k]| = |X[((-k))_N]| \\ \angle\{X[k]\} = -\angle\{X[((-k))_N]\} \end{cases}$$

مثال‌ها در Fig 8.11, 8.13 نشان از N فرد

16.	$x_{\text{ep}}[n] = \frac{1}{2}\{x[n] + x[((-n))_N]\}$	$\mathcal{R}e\{X[k]\}$
17.	$x_{\text{op}}[n] = \frac{1}{2}\{x[n] - x[((-n))_N]\}$	$j\mathcal{I}m\{X[k]\}$

8.7 محاسبهٔ کانولوشن خطی با استفاده از DFT :

از آنجایی که الگوریتم های پیاده سازی موثری برای DFT وجود دارد (در فصل ۹ : FFT) از DFT برای محاسبهٔ کانولوشن خطی استفاده می‌کنیم:

① DFT های N نقطه‌ای از دو دنبالهٔ $x_1[n]$ و $x_2[n]$ به دست می‌آوریم $(X_2[k], X_1[k])$

② حاصلضرب $X_3[k] = X_1[k] X_2[k]$ را برای $0 \leqslant k \leqslant N-1$ به دست می‌آوریم.

③ دنبالهٔ $x_3[n] = x_1[n] \circledN x_2[n]$ را از محاسبهٔ DFT معکوس (IDFT) از $X_3[k]$ به دست می‌آوریم.

← از تجربه مثال ۱۱ دیدیم که همواره حاصل کانولوشن خطی در چرخشی یکسان نخواهد شد. بنابراین لازم است شرطی روی N قرار داده شود. ⇐ $\boxed{N \geqslant L+P-1}$ باشد

7.1 : محاسبهٔ کانولوشن خطی دو دنبالهٔ با طول محدود:

$x_2[n]$ با طول P ، $0 \leqslant n \leqslant P-1$ و $x_1[n]$ با طول L ، $0 \leqslant n \leqslant L-1$

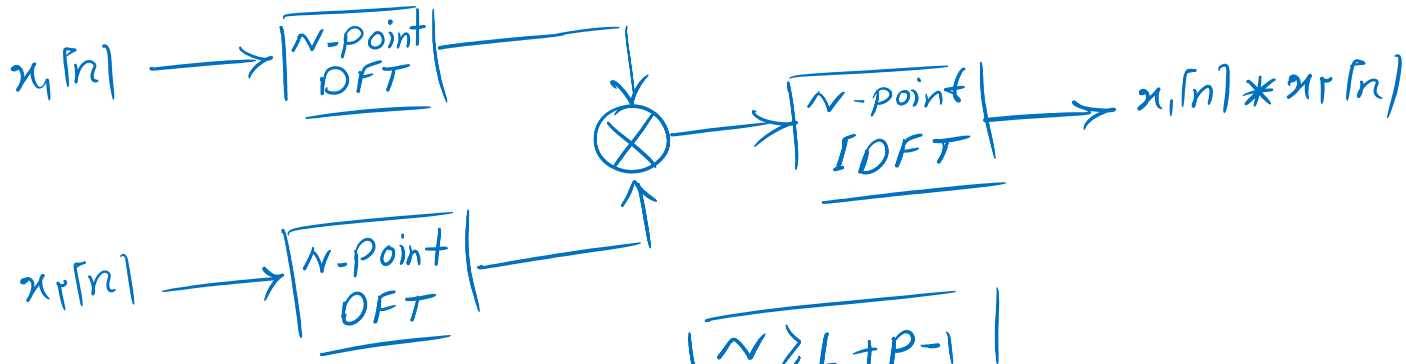
$$x_3[n] = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} x_1[m] x_2[n-m]$$

*

بیشترین طول حاصل کانولوشن خطی $L+P-1$ خواهد بود → $\boxed{0 \leqslant n \leqslant L+P-2}$

* اگر $N \geq L+P-1$ انتخاب شود: $x_1[n] * x_2[n] = x_1[n] \; (N) \; x_2[n]$

بطور دیگر محاسبه کانولوشن خطی با استفاده از DFT :

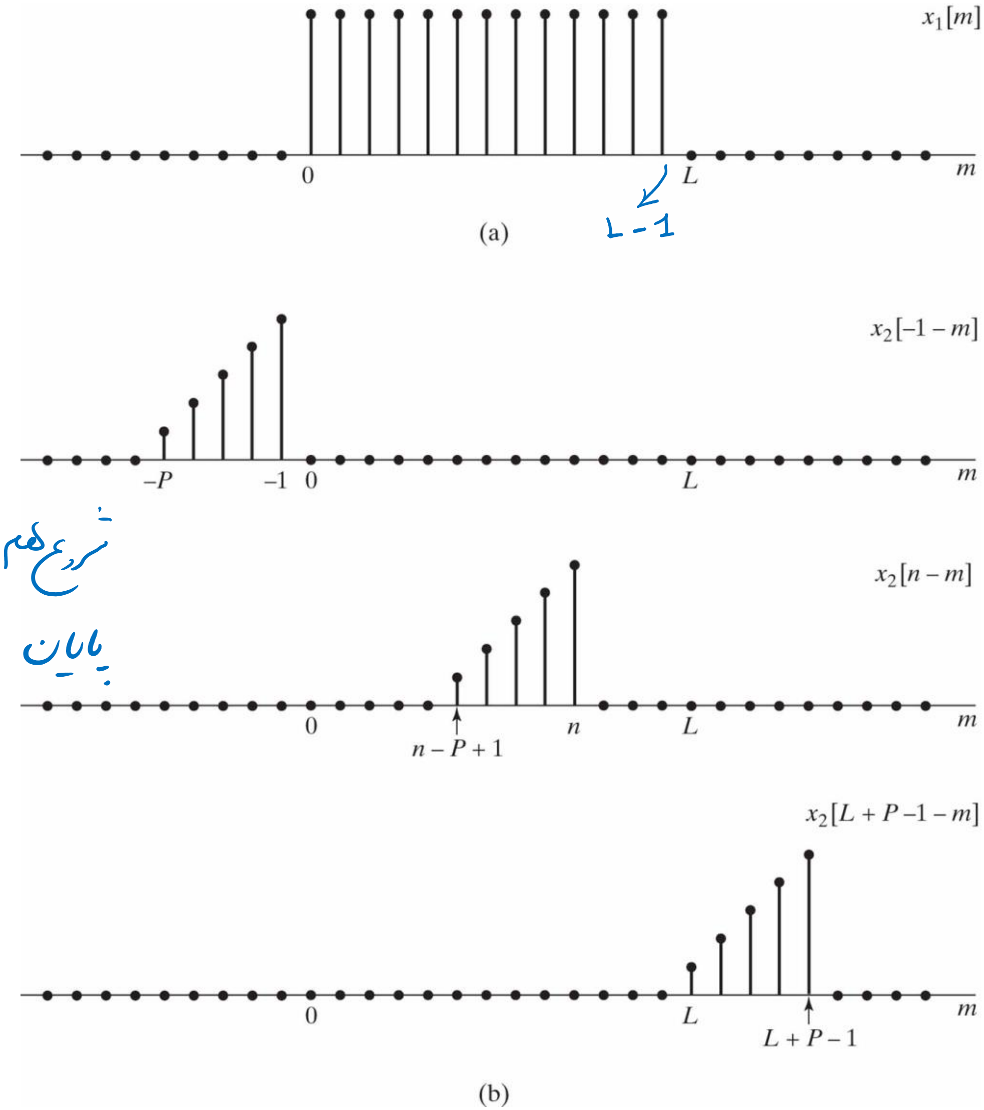


$$\boxed{N \geq L+P-1}$$

طول سیگنال ها را با zero-padding (اضافه کردن صفر به انتهای دنباله) به طول حداقل $\underline{L+P-1}$ می‌رسانیم.

Figure 8.17 Example of linear convolution of two finite-length sequences showing that the result is such that $x_3[n] = 0$ for $n \leq -1$ and for $n \geq L + P - 1$. (a) Finite-length sequence $x_1[m]$. (b) $x_2[n - m]$ for several values of n.

مثال کانولوشن خطی :



$n = 0$ شروع همپوشانی

$n - P + 1 = L - 1$ 〃 پایان

$\Rightarrow \boxed{n = L + P - 2}$

Figure 8.18 Illustration that circular convolution is equivalent to linear convolution followed by aliasing. (a) The sequences $x_1[n]$ and $x_2[n]$ to be convolved. (b) The linear convolution of $x_1[n]$ and $x_2[n]$. (c) $x_3[n-N]$ for $N = 6$. (d) $x_3[n+N]$ for $N = 6$. (e) $x_1[n]$ ⑥ $x_2[n]$, which is equal to the sum of (b), (c), and (d) in the interval $0 \le n \le 5$. (f) $x_1[n]$ ⑫ $x_2[n]$.

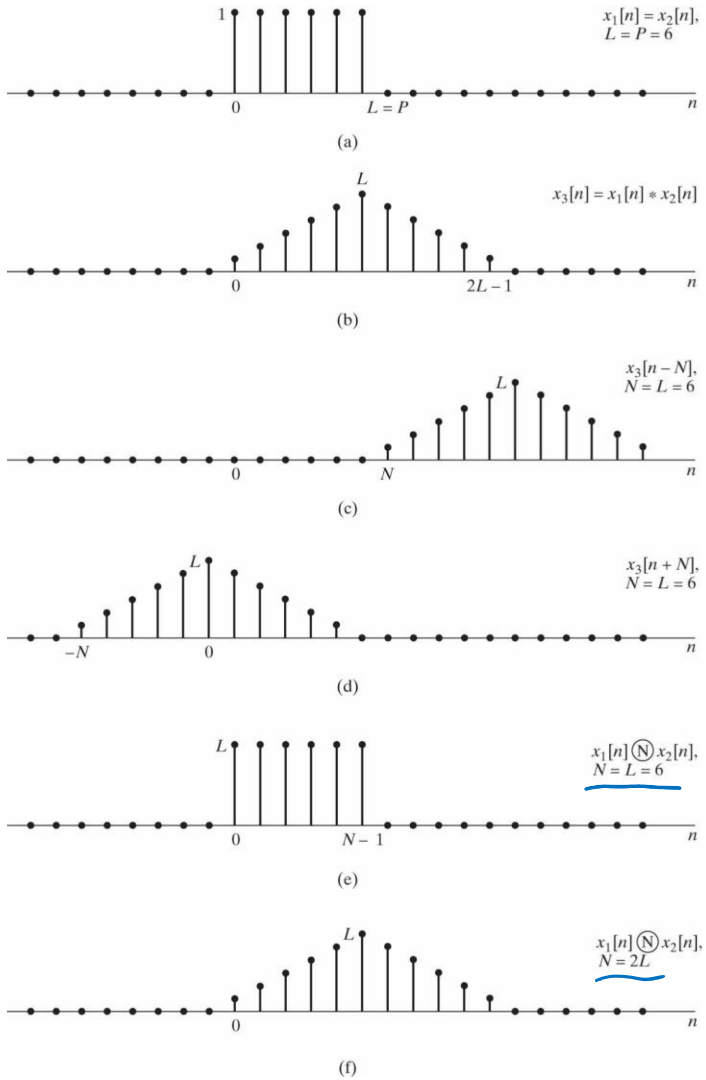


Figure 8.19 An example of linear convolution of two finite-length sequences.

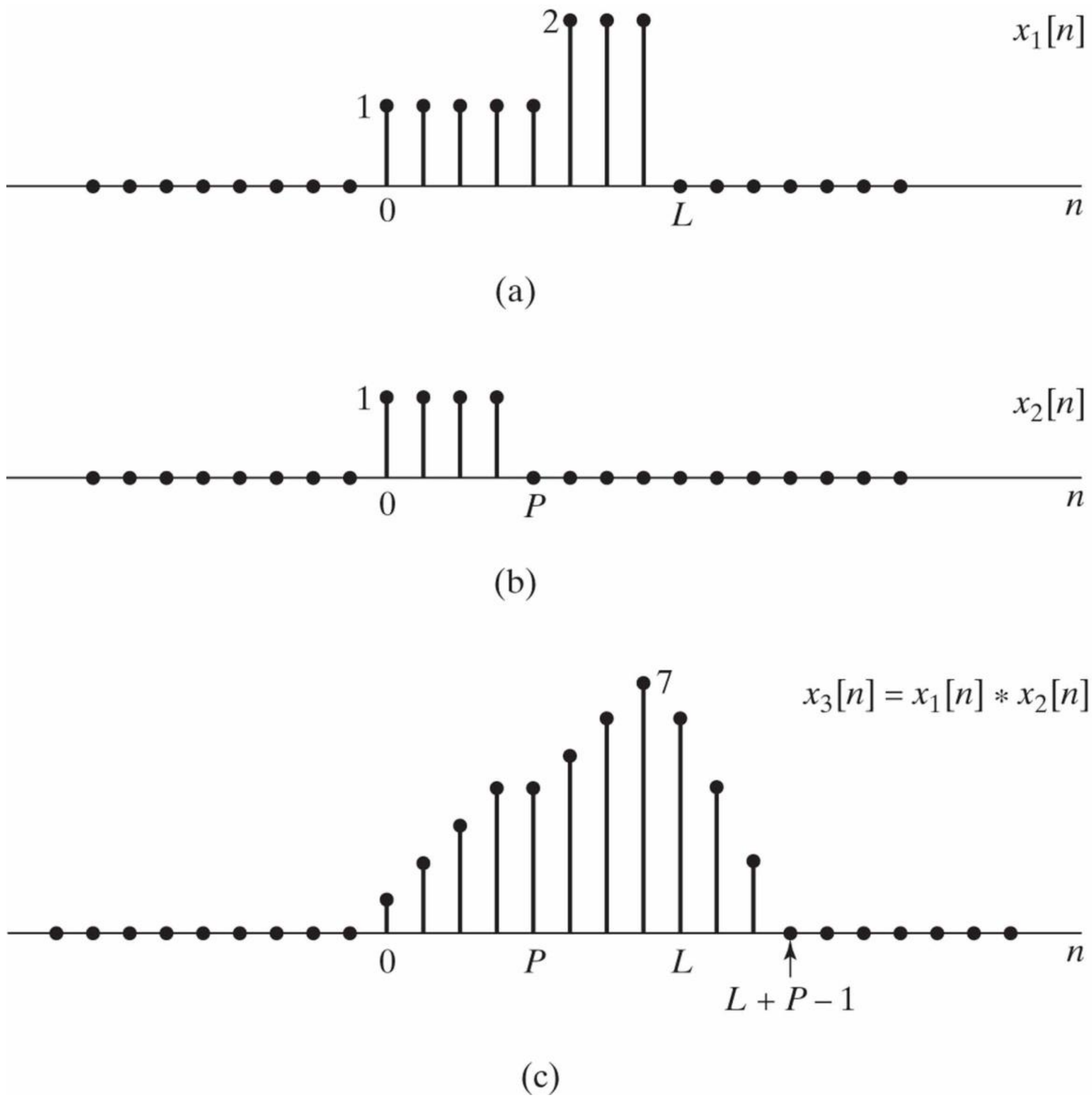


Figure 8.20 Interpretation of circular convolution as linear convolution followed by aliasing for the circular convolution of the two sequences $x_1[n]$ and $x_2[n]$ in Figure 8.19.

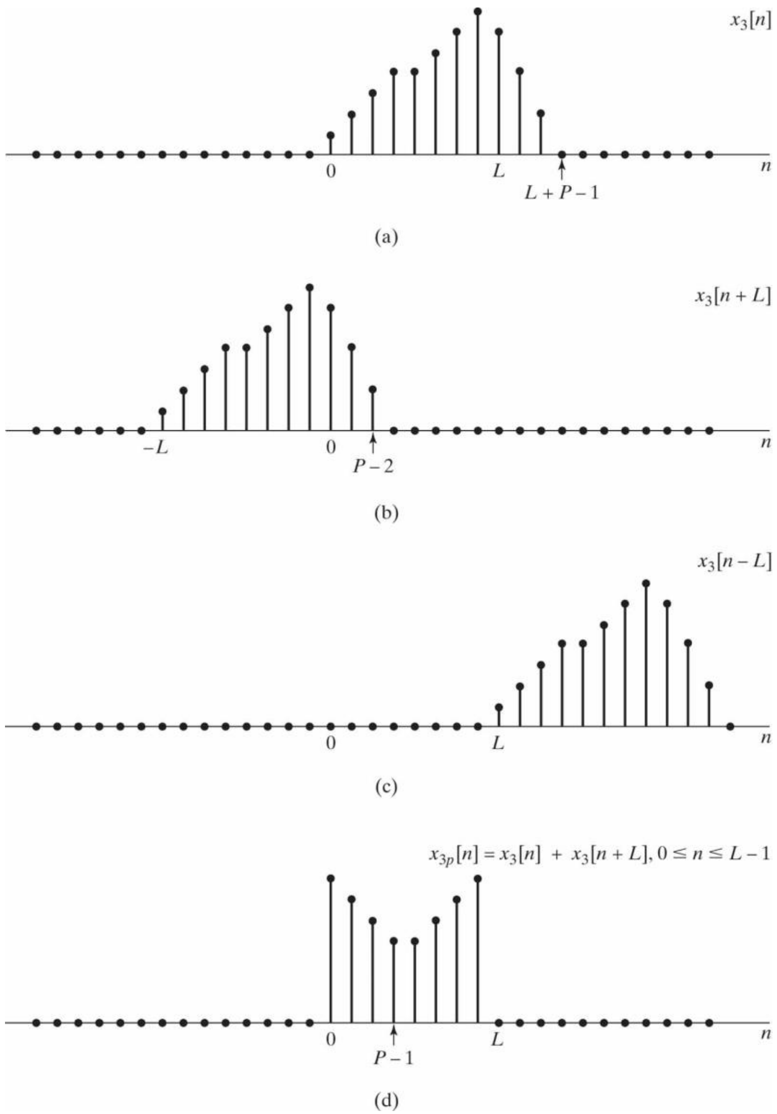
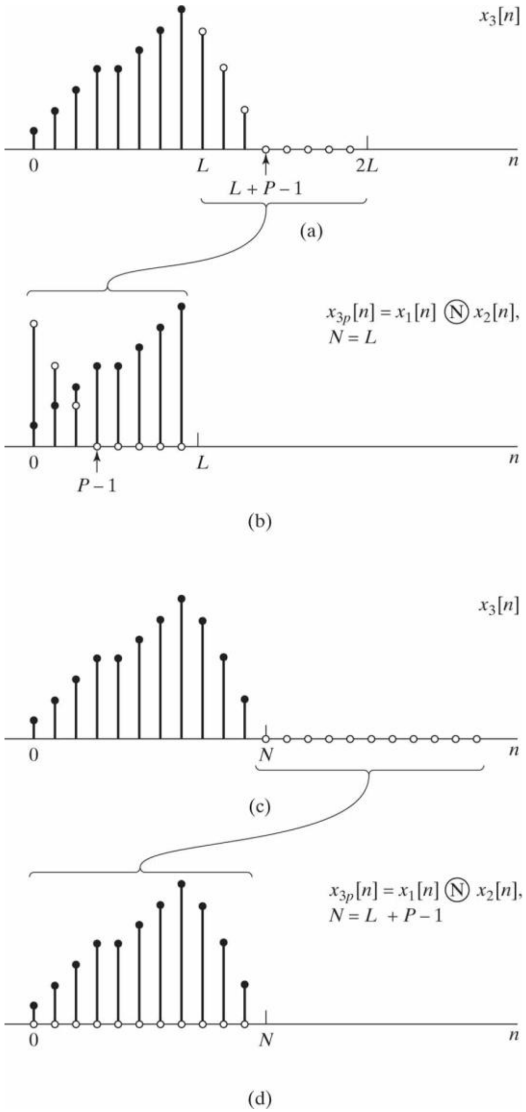


Figure 8.21 Illustration of how the result of a circular convolution "wraps around." (a) and (b) $N = L$, so the aliased "tail" overlaps the first $(P - 1)$ points. (c) and (d) $N = (L + P - 1)$, so no overlap occurs.



محاسبه خروجی سیستم LTI با استفاده از DFT :

اگر طول سیگنال ورودی نامحدود باشد: مثل سیگنال صحبت در فرآیند فیلتر کردن

راه حل: استفاده از کانولوشن بلوکی

Block Convolution

$$x[n] = x_0[n] + x_1[n-L] + x_2[n-2L] + \dots$$

$$x[n] * h[n] = x_0[n] * h[n] + x_1[n-L] * h[n] + x_2[n-2L] * h[n] + \dots$$

$$= x_0[n] * h[n] + \{\underbrace{x_1[n] * h[n]}_{y_1[n]}\}_{n \to n-L} + \{\underbrace{x_2[n] * h[n]}_{y_2[n]}\}_{n \to n-2L} + \dots$$

$$y[n] = y_0[n] + y_1[n-L] + y_2[n-2L] + \dots$$

$\Leftarrow$ L باید در محدوده p انتخاب شود تا کارآیی الگوریتم‌های FFT, IFFT مشخص شود.

PEARSON
Discrete-Time Signal Processing, Third Edition
Alan V. Oppenheim • Ronald W. Schafer

Figure 8.22 Finite-length impulse response $h[n]$ and indefinite-length signal $x[n]$ to be filtered.

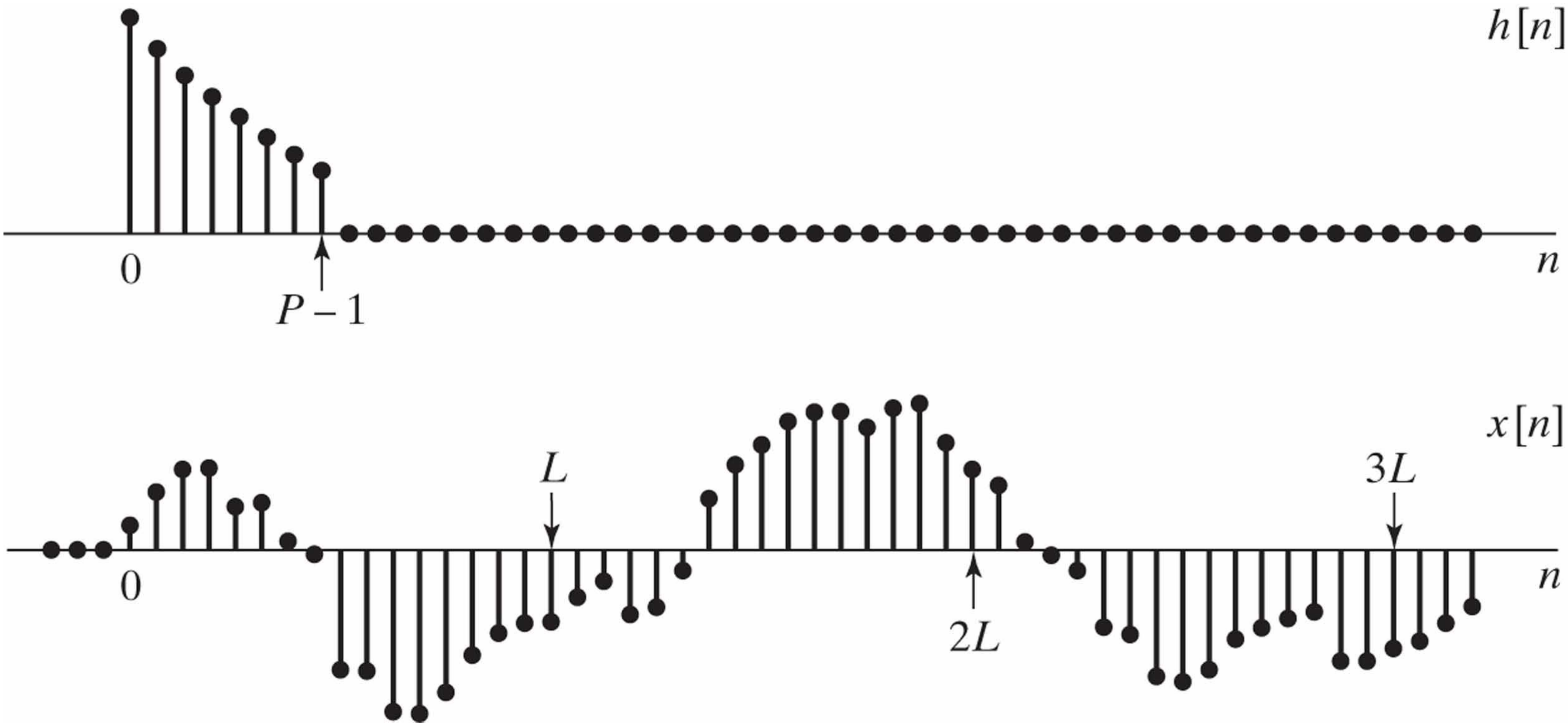


Figure 8.23 (a) Decomposition of $x[n]$ in Figure 8.22 into nonoverlapping sections of length L. (b) Result of convolving each section with $h[n]$.

روش overlap-add :

$x_1[n-L] \rightarrow$

$x_2[n-2L] \rightarrow$

$y_1[n-L] \rightarrow$

$y_2[n-2L] \rightarrow$

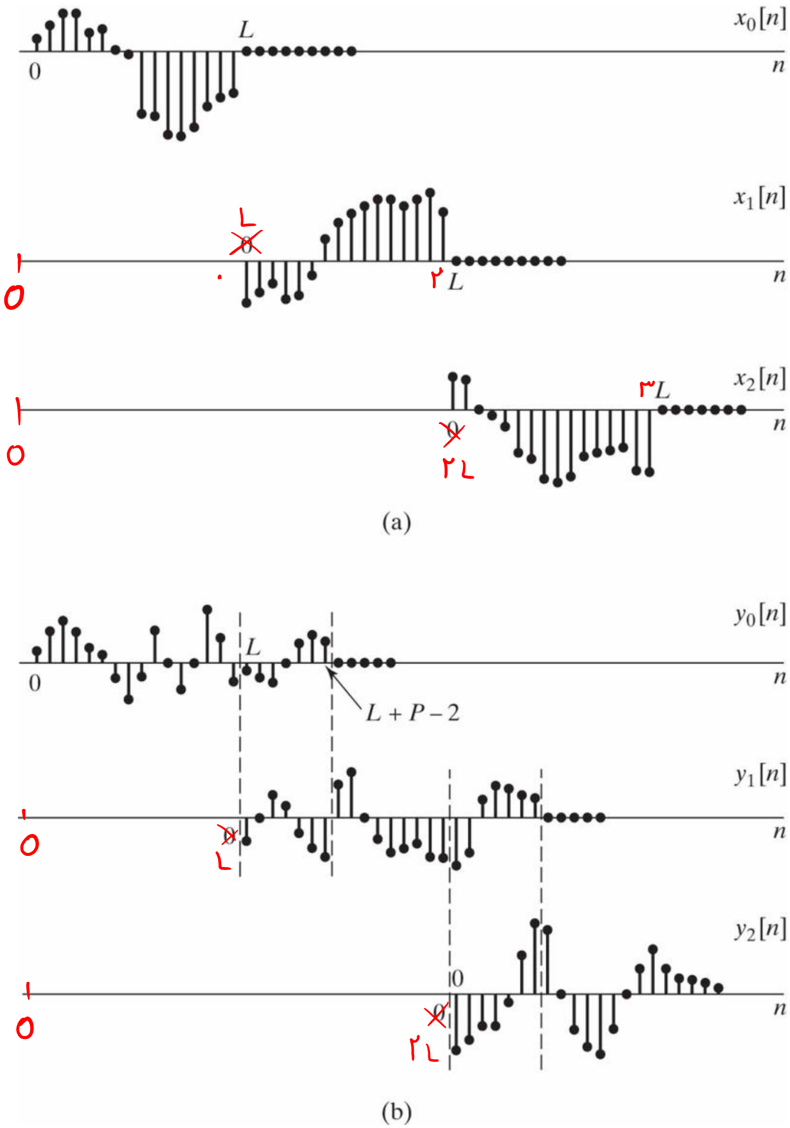
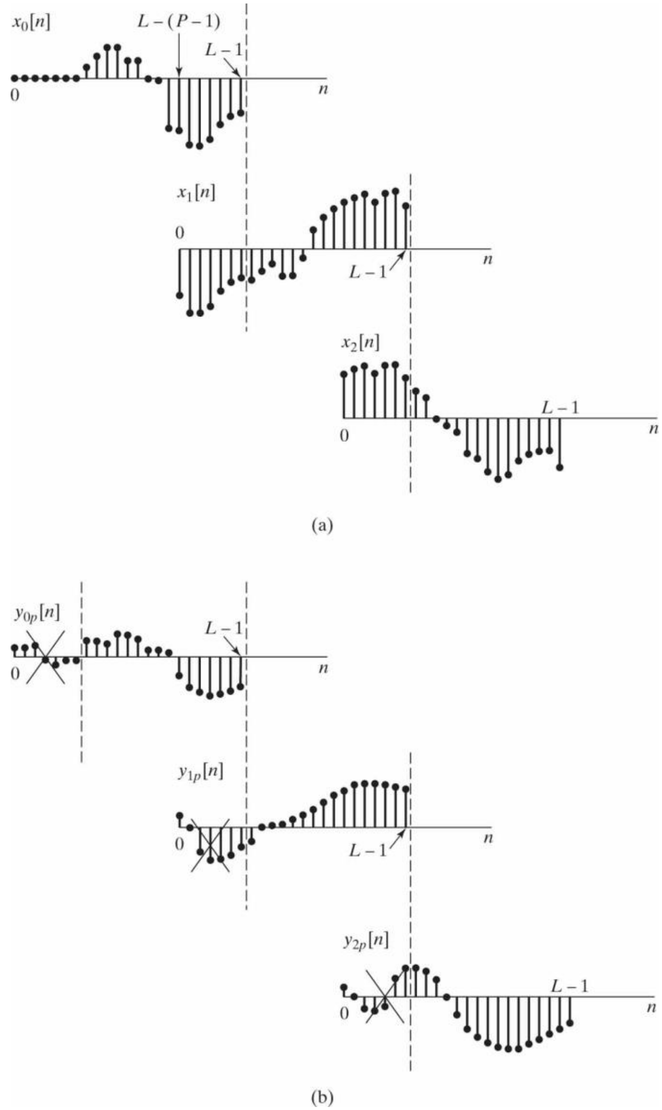


Figure 8.24 (a) Decomposition of *x*[*n*] in Figure 8.22 into overlapping sections of length *L*. (b) Result of convolving each section with *h*[*n*]. The portions of each filtered section to be discarded in forming the linear convolution are indicated.

روش Overlap-save :



8: تبدیل کسینوسی گسسته: DCT

Discrete Cosine Transform

رابطهٔ کلی تبدیل‌های گسسته: (تعمیم DFT)

$$\begin{cases} A[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]\,\varphi_k^*[n] \; ; \; 0 \leq k \leq N-1 \\ x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} A[k]\,\varphi_k[n] \; ; \; 0 \leq n \leq N-1 \end{cases}$$

$\varphi_k[n]$ ها پایه‌های متعامد یکه:

متعامد بودن: $\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \varphi_k[n]\,\varphi_m^*[n] = \begin{cases} 1 & ; \; m = k \\ 0 & ; \; m \neq k \end{cases}$

یکه بودن: $|\varphi_k[n]| = 1$

مثال:

$$\text{DFT}: \begin{cases} A[k] = X[k] \\ \varphi_k[n] = e^{j\left(\frac{2\pi}{N}\right)kn} = W_N^{-kn} \end{cases}$$

مشکل DFT: اگر سیگنال حقیقی باشد آنگاه لزوماً DFT آن حقیقی نخواهد بود. ← تبدیل‌های با پایهٔ حقیقی

cosine

Haar

Hadamard

Hartley

تعریف DCT :

$$\begin{cases} \varphi_k[n] = \cos(\pi, k, n) \\ A[k] = X^c[k] \end{cases}$$

برتری : اگر $x[n]$ حقیقی ، $X^c[k]$ نیز حقیقی خواهد بود.

براساس توابع پایه $\varphi_k[n]$. 8 نوع مختلف DCT تعریف می‌شود.

DCT 1 — DCT 8

$X^{c1}[k] \sim X^{c8}[k]$

<u>DCT-1</u> روابط $\frac{152}{153}$ روابط

<u>DCT-2</u> روابط $\frac{155}{156}$

Figure 8.25 Four ways to extend a four-point sequence $x[n]$ both periodically and symmetrically. The finite-length sequence $x[n]$ is plotted with solid dots. (a) Type-1 periodic extension for DCT-1. (b) Type-2 periodic extension for DCT-2. (c) Type-3 periodic extension for DCT-3. (d) Type-4 periodic extension for DCT-4.

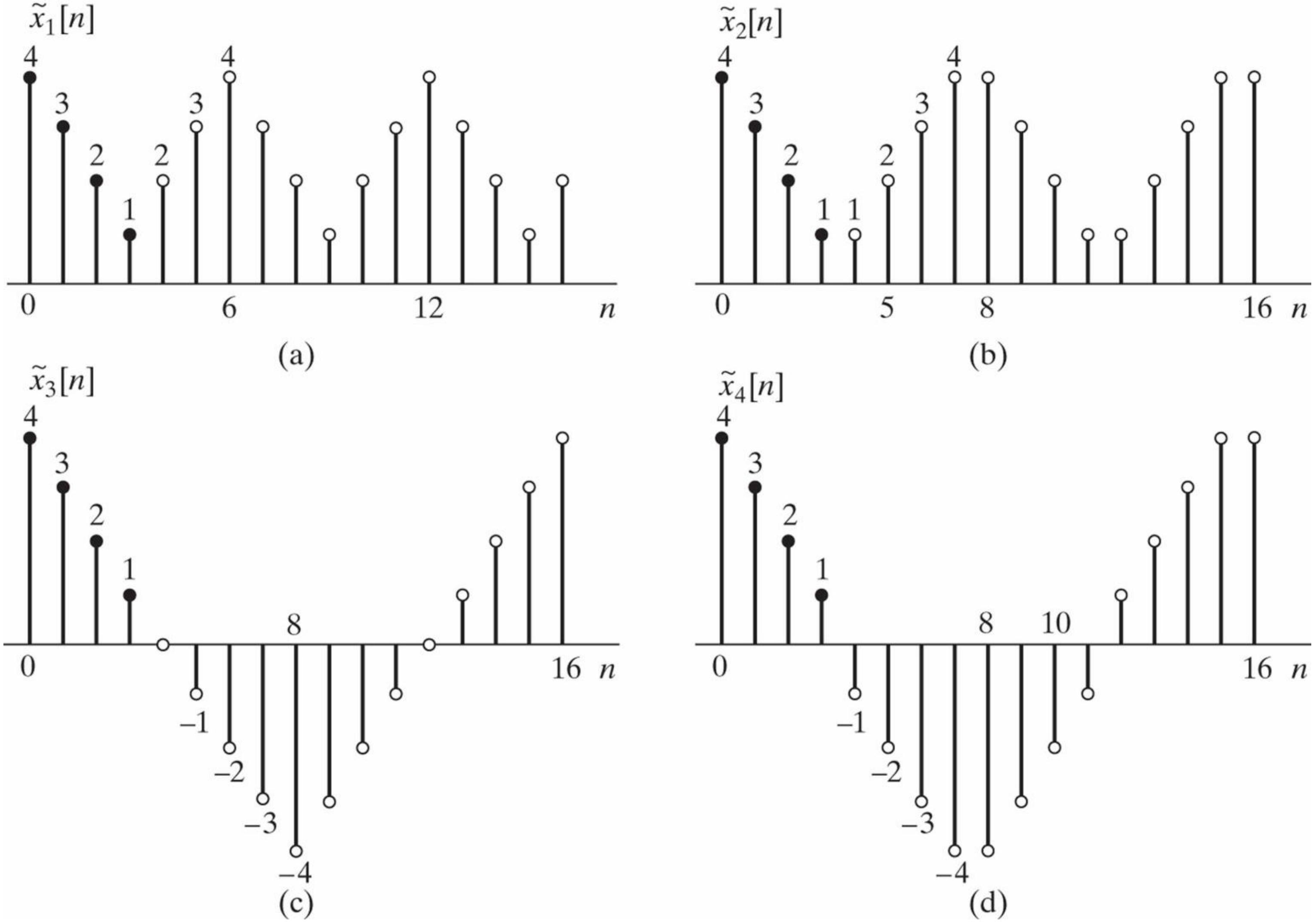
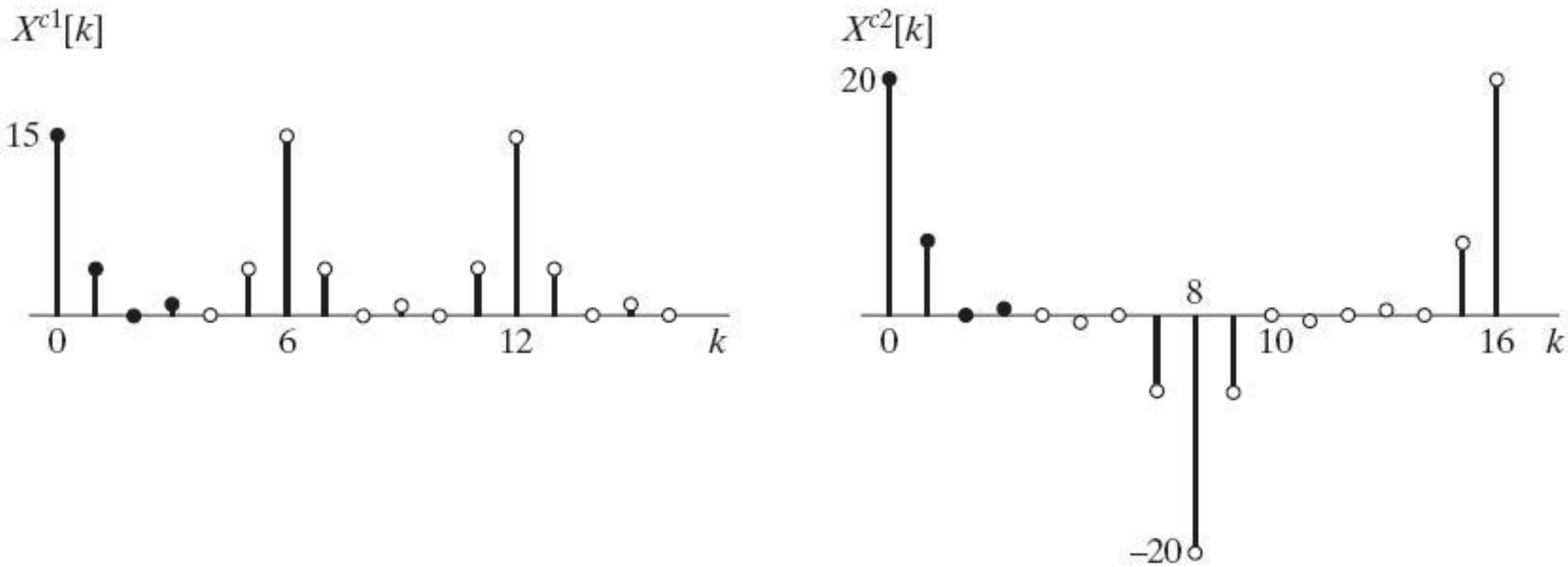


Figure 8.26 DCT-1 and DCT-2 for the four-point sequence used in Figure 8.25. (a) DCT-1. (b) DCT-2.



ویژگی فشرده سازی انرژی در DCT-2 :

پارسوال :

$$\text{DCT-2}: \quad \sum_{n=0}^{N-1} |x[n]|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \beta[k] \, |X^{c2}[k]|^2$$

مثال :

$$x[n] = a^n \cos(\omega_0 n + \varphi)$$

$$n = 0, 1, \ldots, N-1$$

$$a = 0.9$$

$$\omega_0 = 0.1\pi$$

$$\phi = 0$$

$$N = 32$$

Fig 8.27

Figure 8.27 Test signal for comparing DFT and DCT.

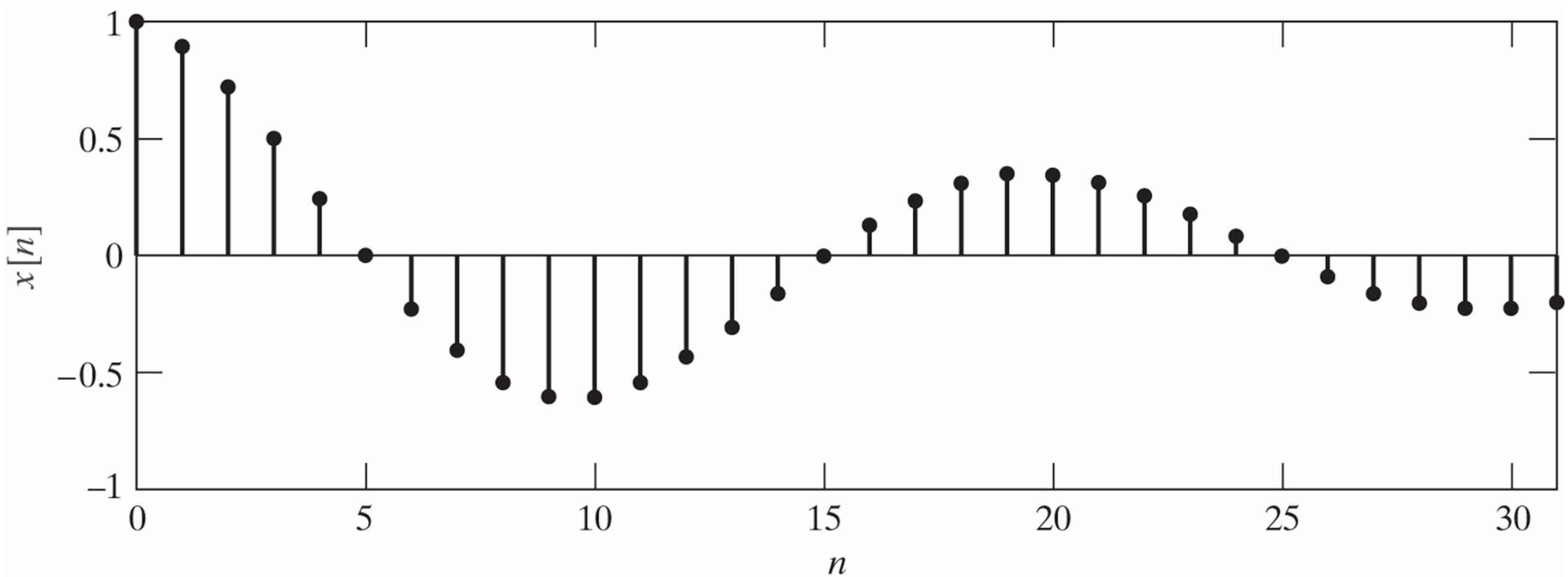
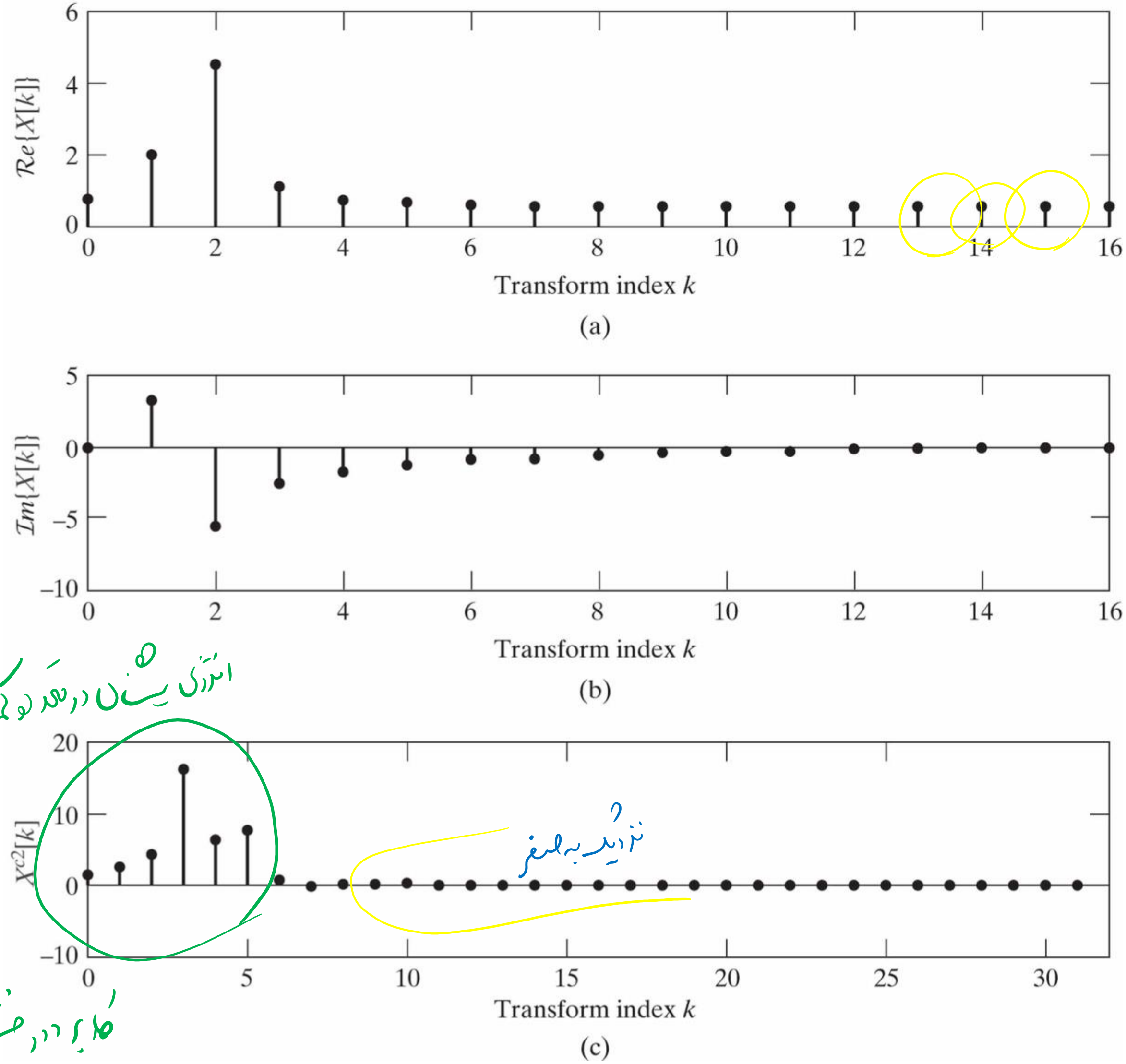


Figure 8.28 (a) Real part of 32-point DFT; (b) Imaginary part of 32-point DFT; (c) 32-point DCT-2 of the test signal plotted in Figure 8.27.

DFT

$N = 16$

$16 \times 2 = 32$



انرژی سیگنال در تعداد کمتری از ضرایب فشرده می‌شود

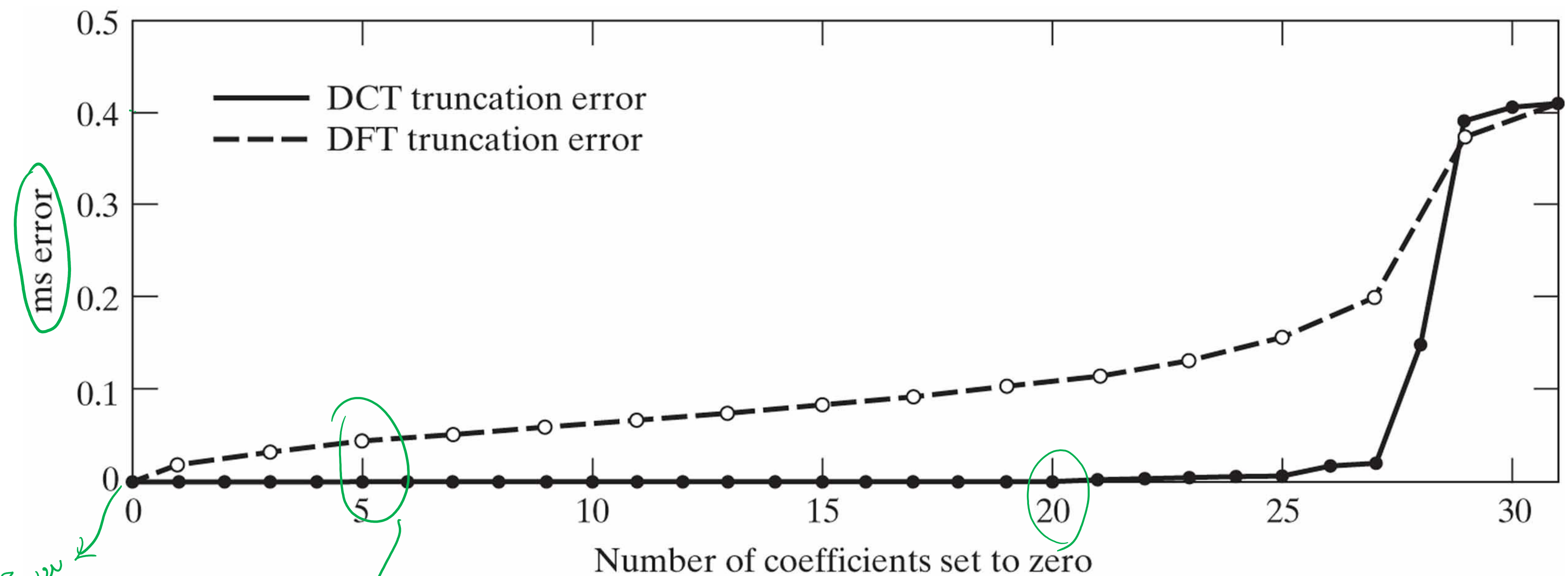
DCT-2 →

$N = 32$

کارایی در فشرده‌سازی اطلاعات

Figure 8.29 Comparison of truncation errors for DFT and DCT-2.

ms error : $E^{dct}[m] = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} |x[n] - x_m^{dct}[n]|^2$



بدون حذف

حذفی DFT بیشتر از حذفی DCT-2

فشرده سازی تصویر با الگوریتم JPEG:

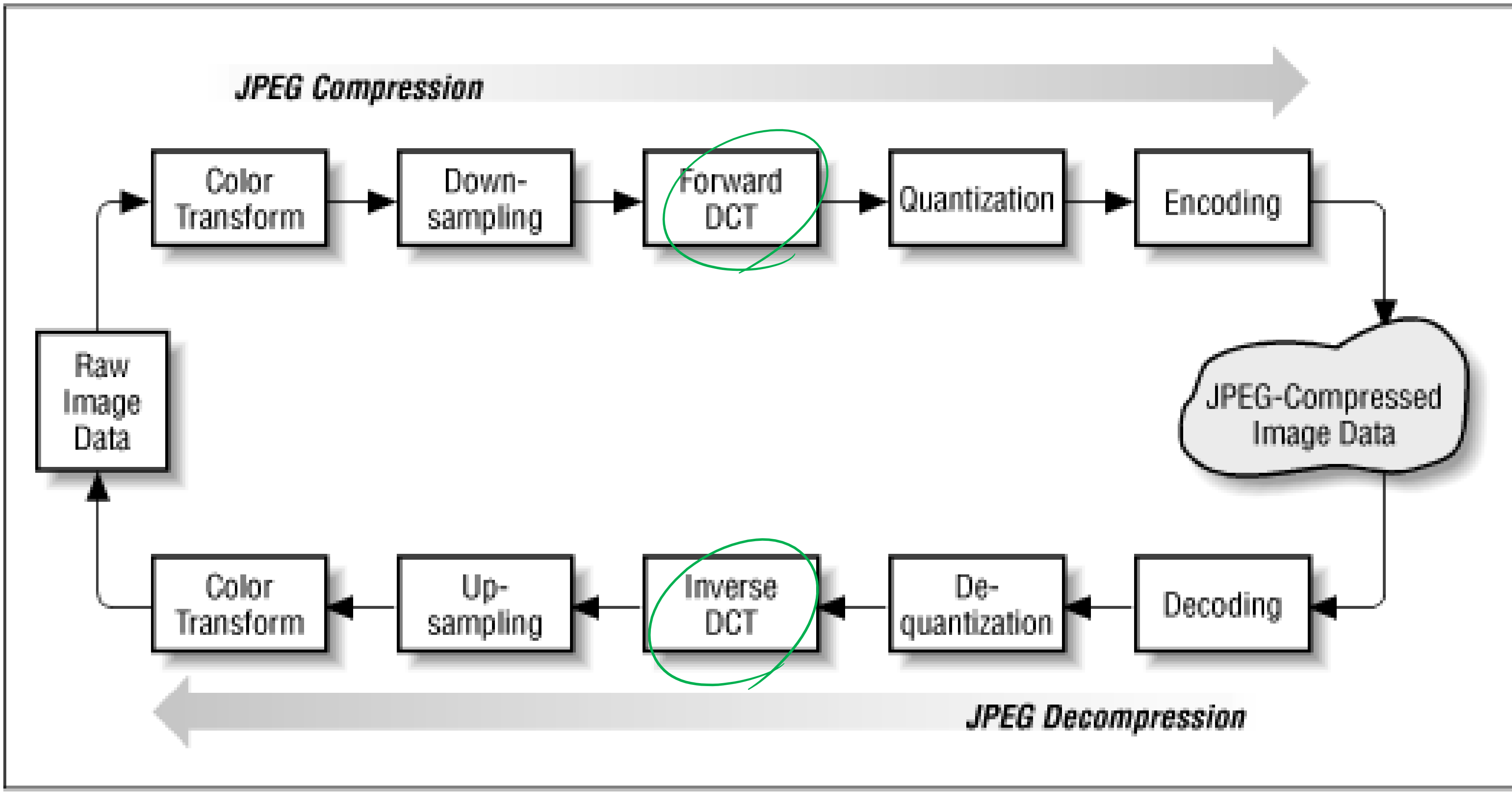


Figure P8.2

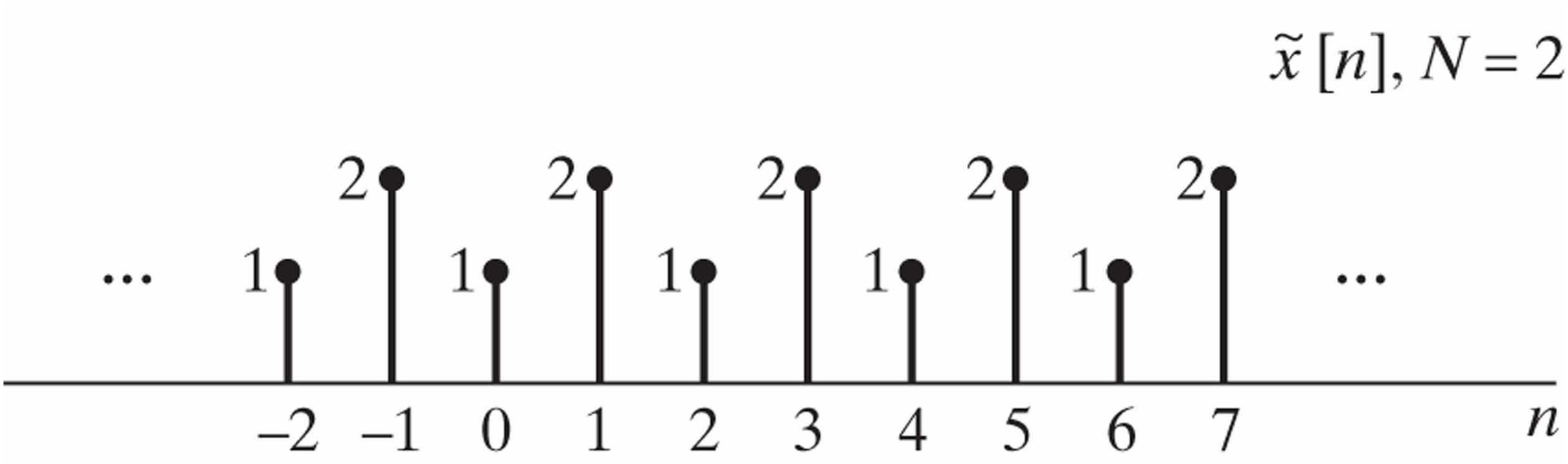


Figure P8.3

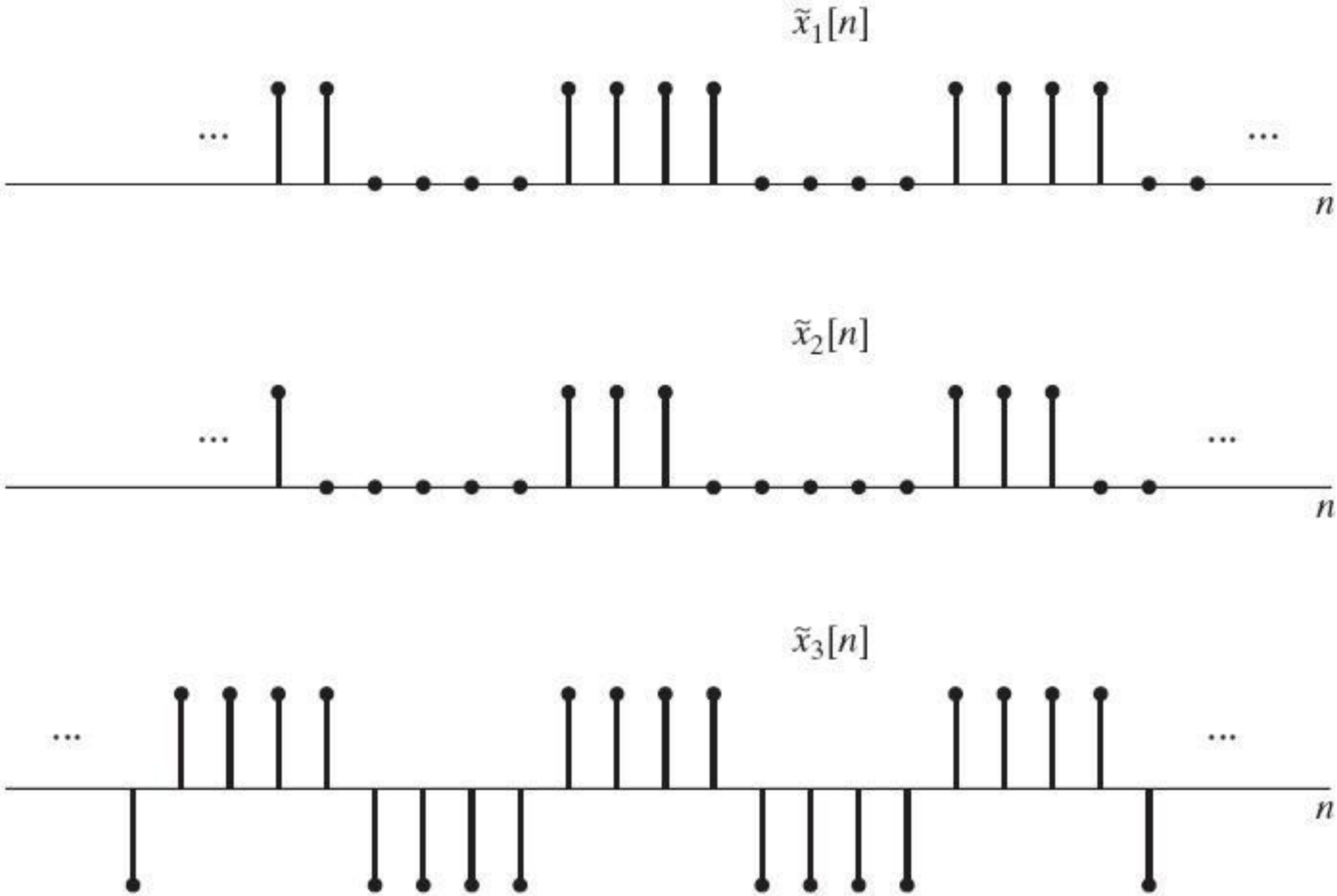


Figure P8.7

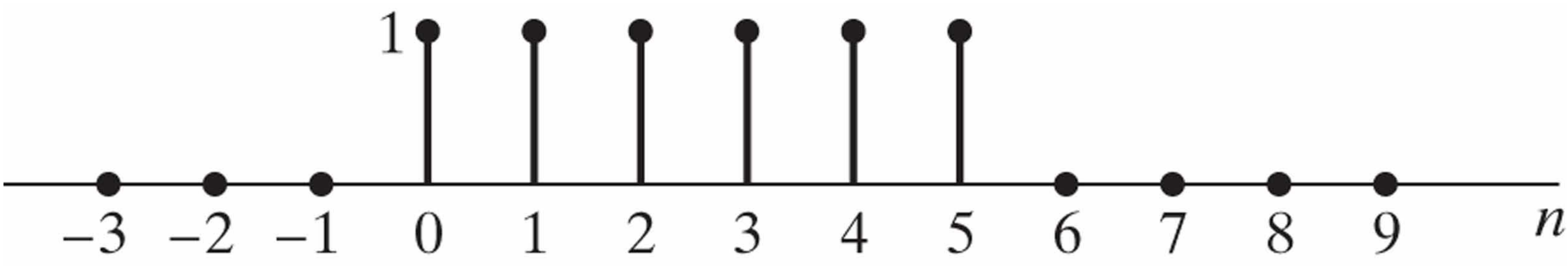


Figure P8.10

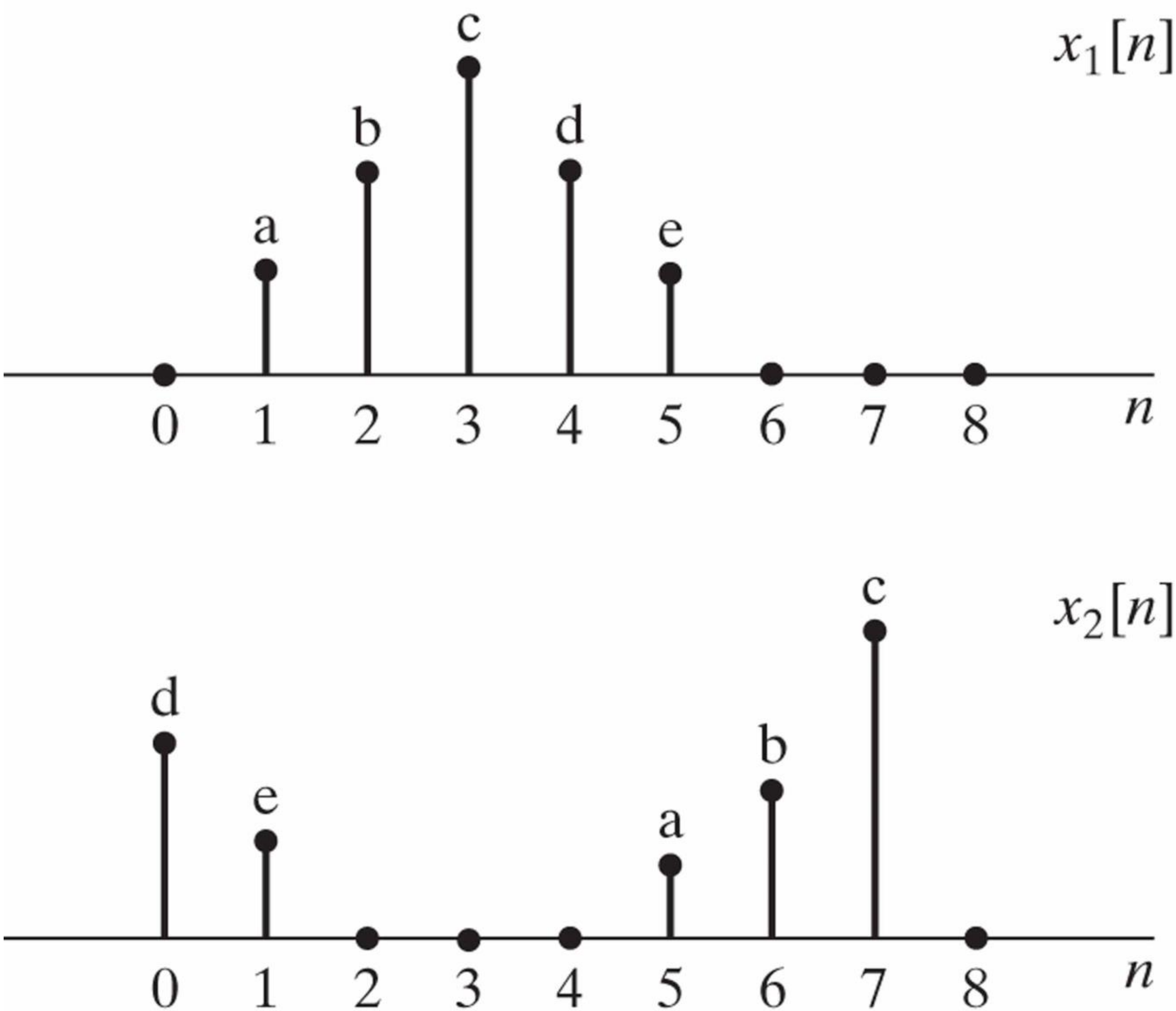


Figure P8.11

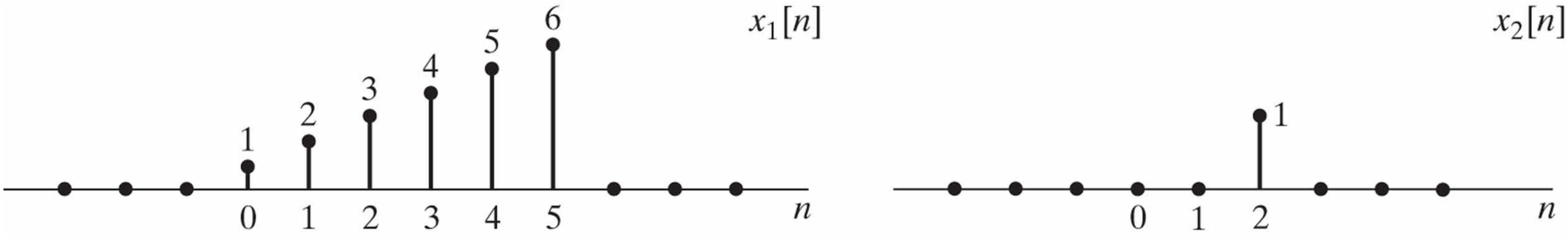


Figure P8.13

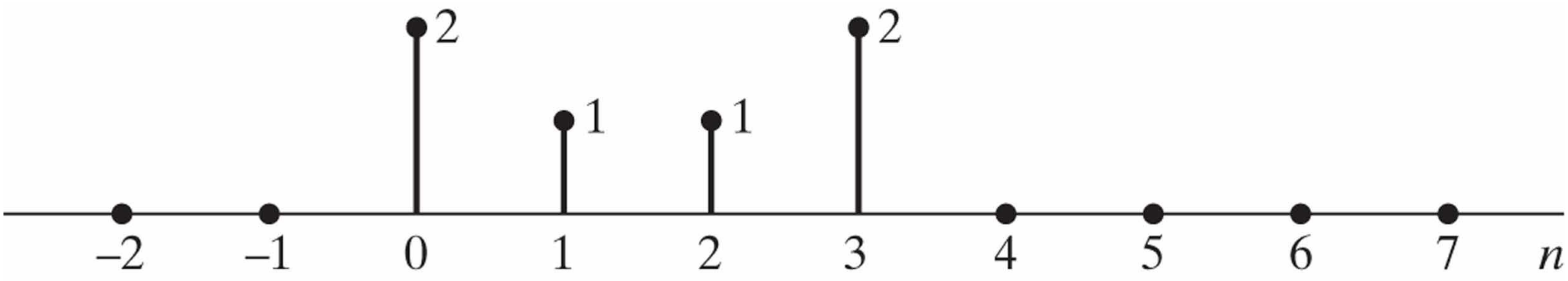


Figure P8.14

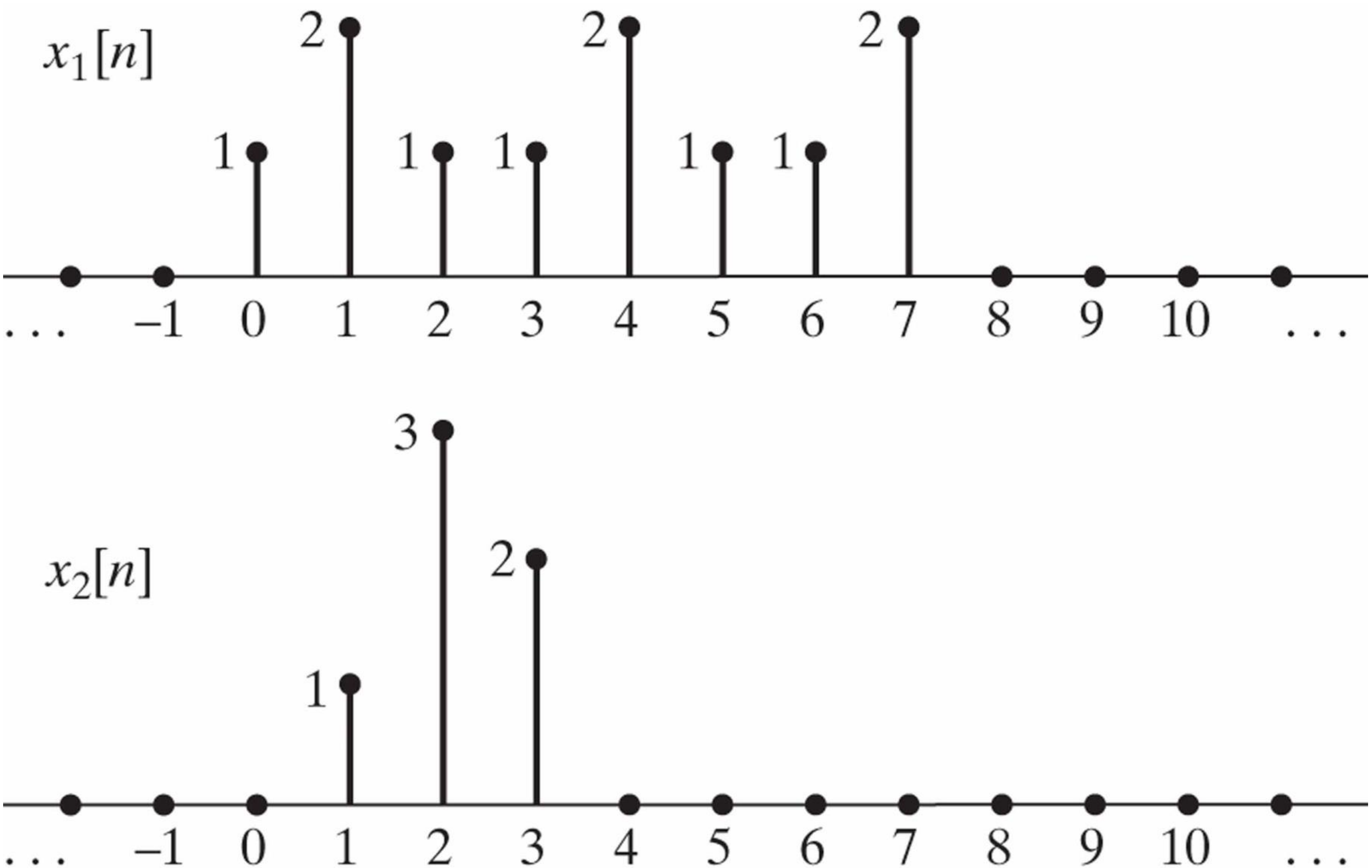


Figure P8.15-1

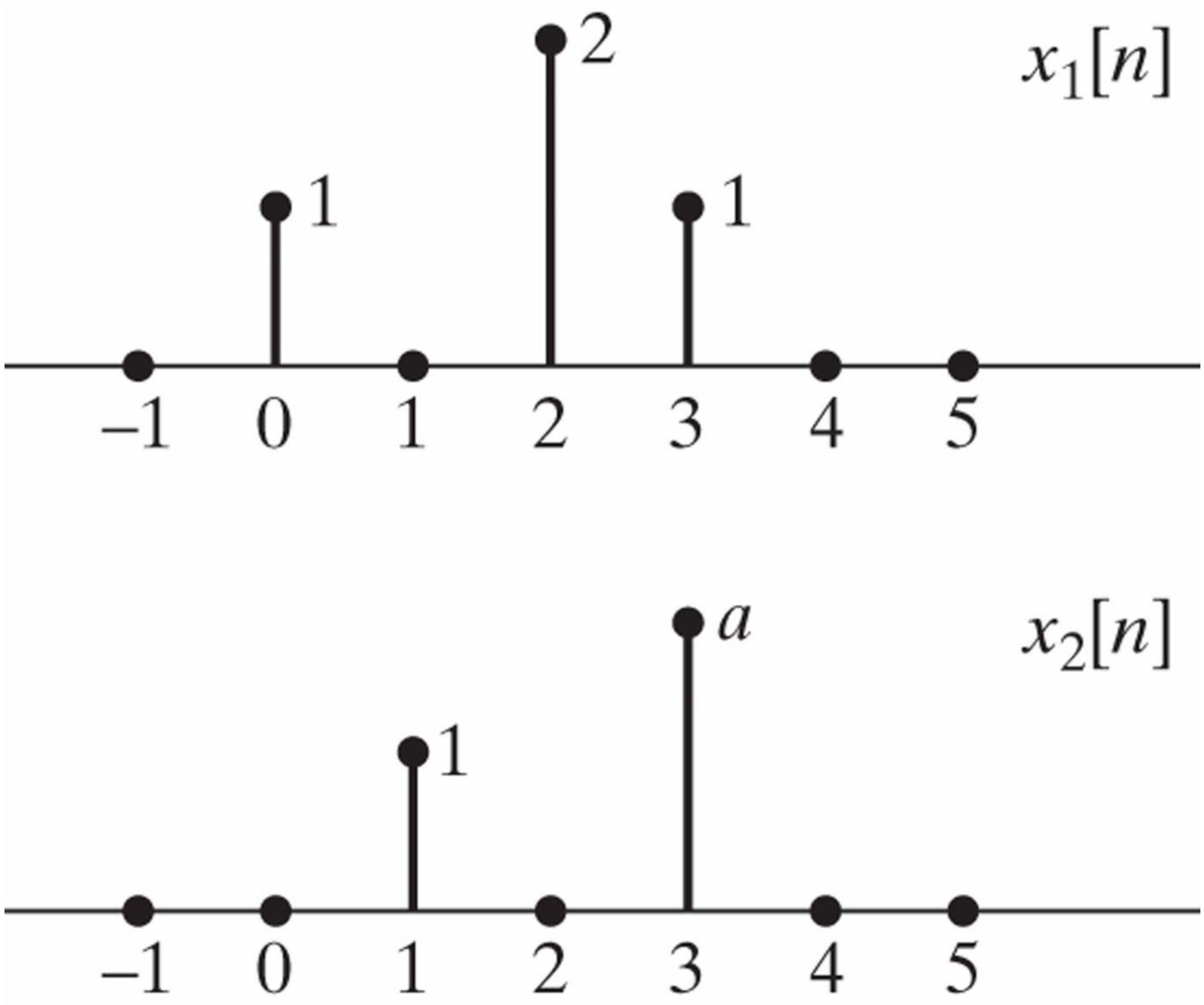


Figure P8.15-2

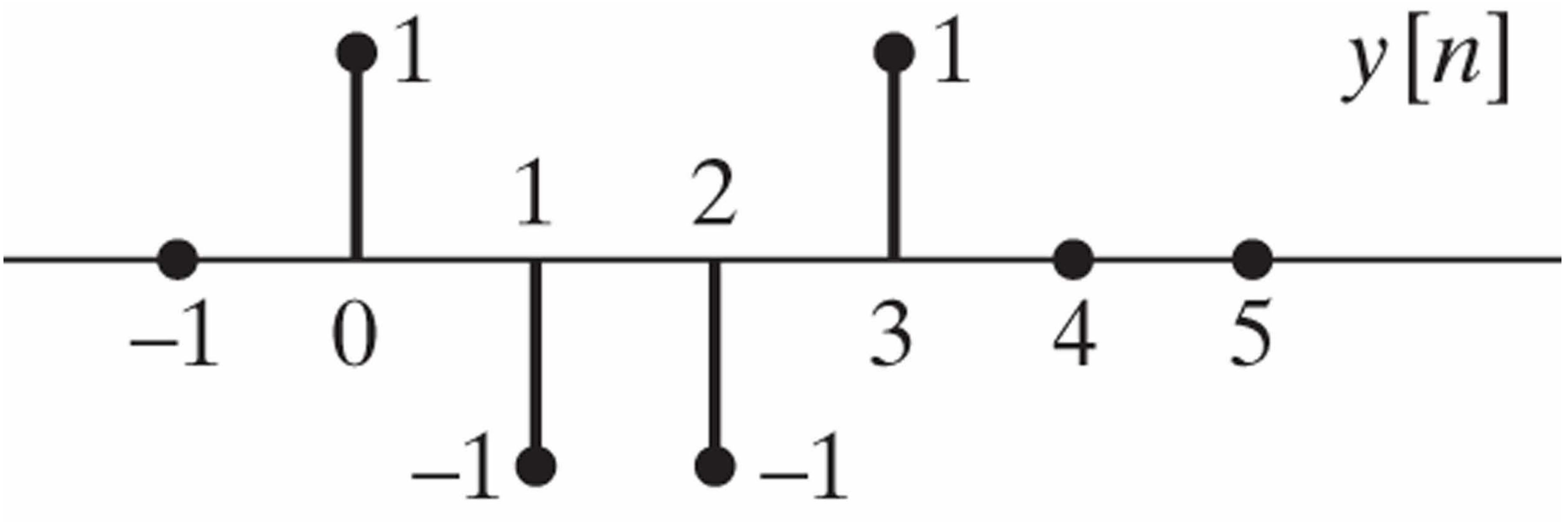


Figure P8.16-1

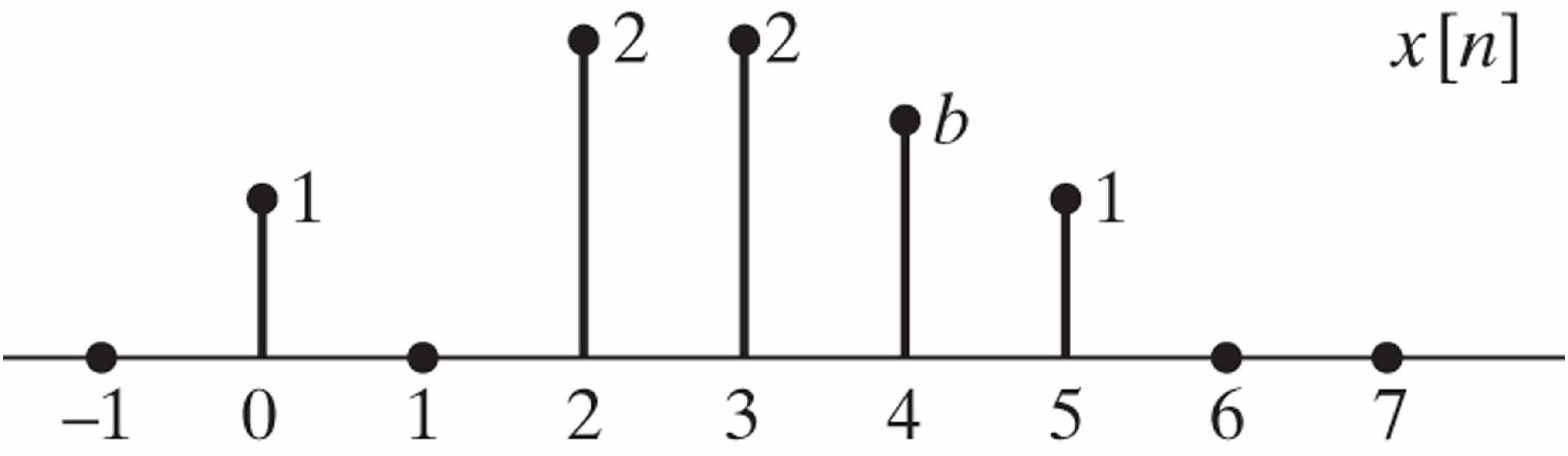


Figure P8.16-2

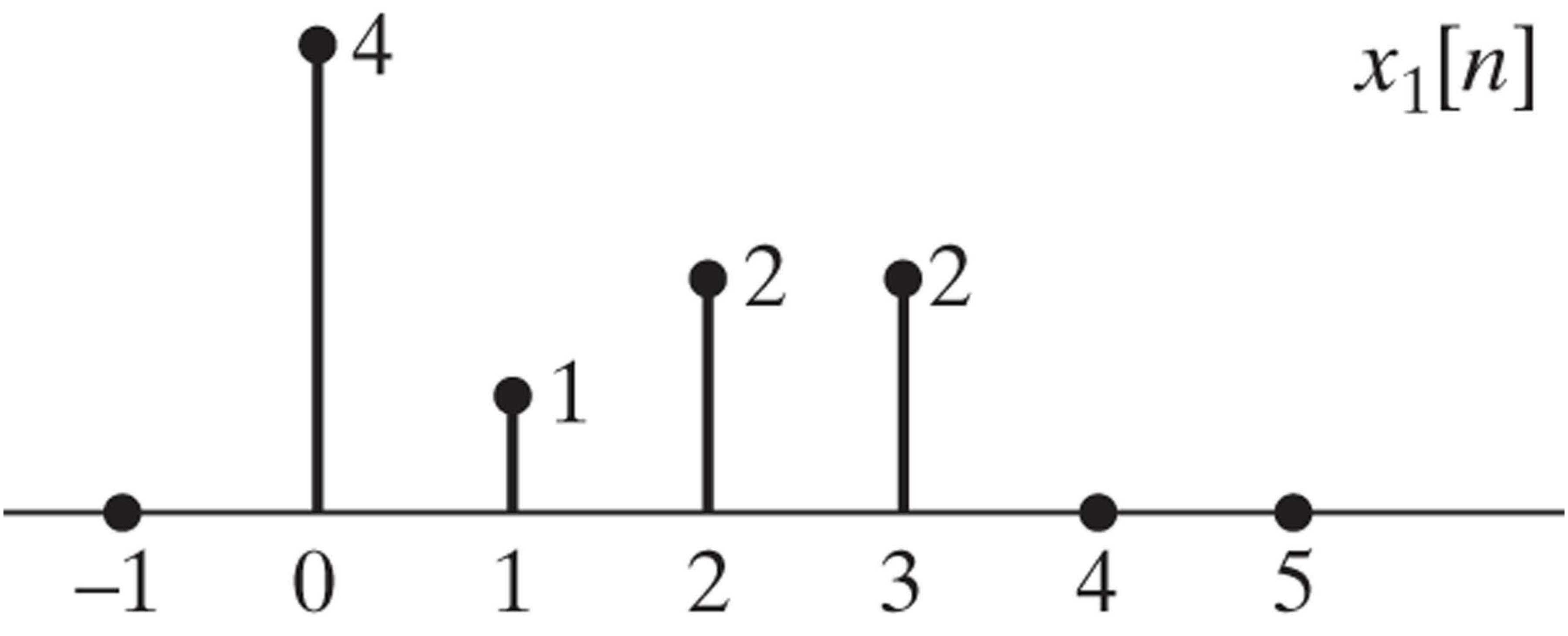


Figure P8.17

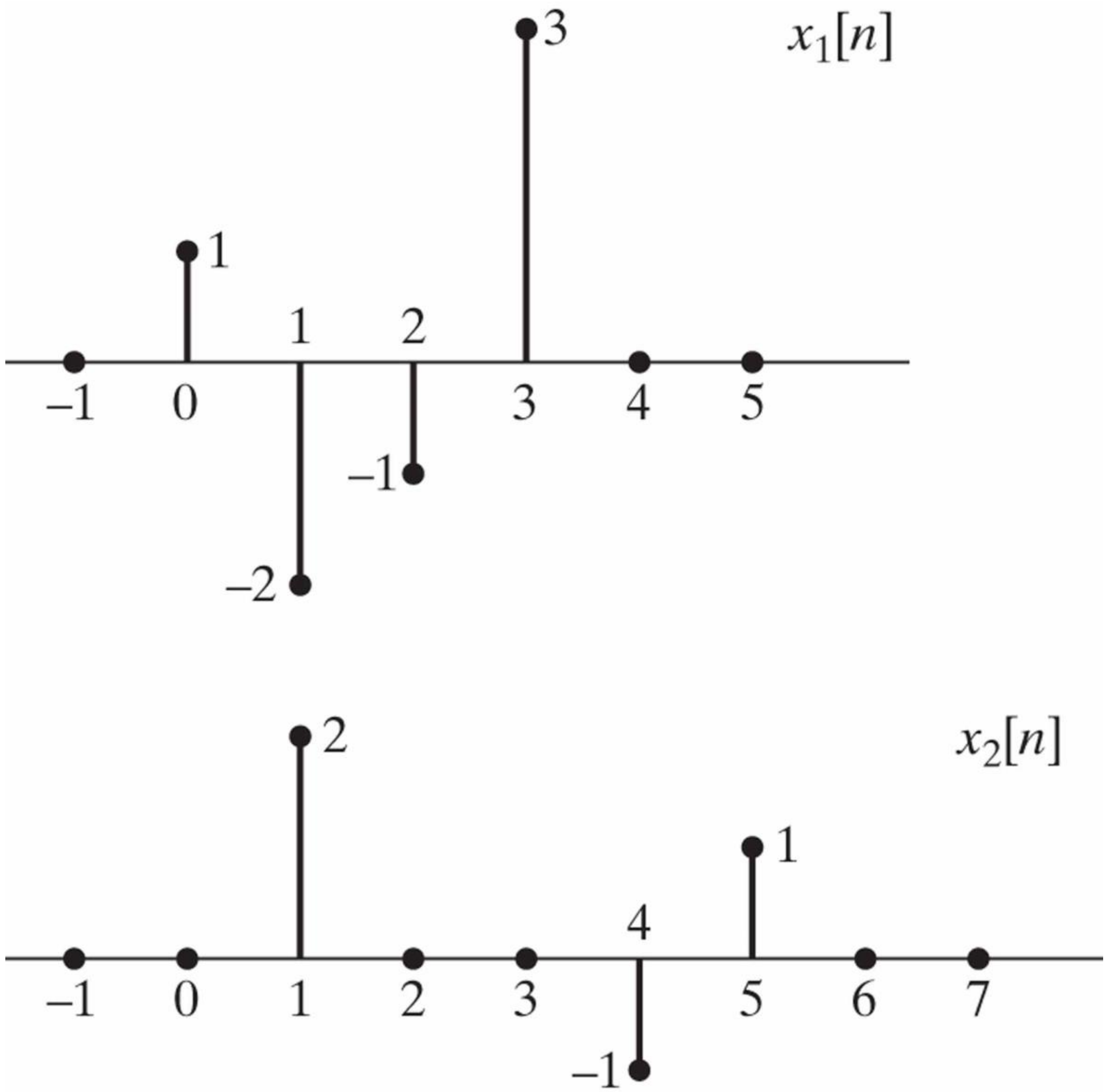


Figure P8.18-1

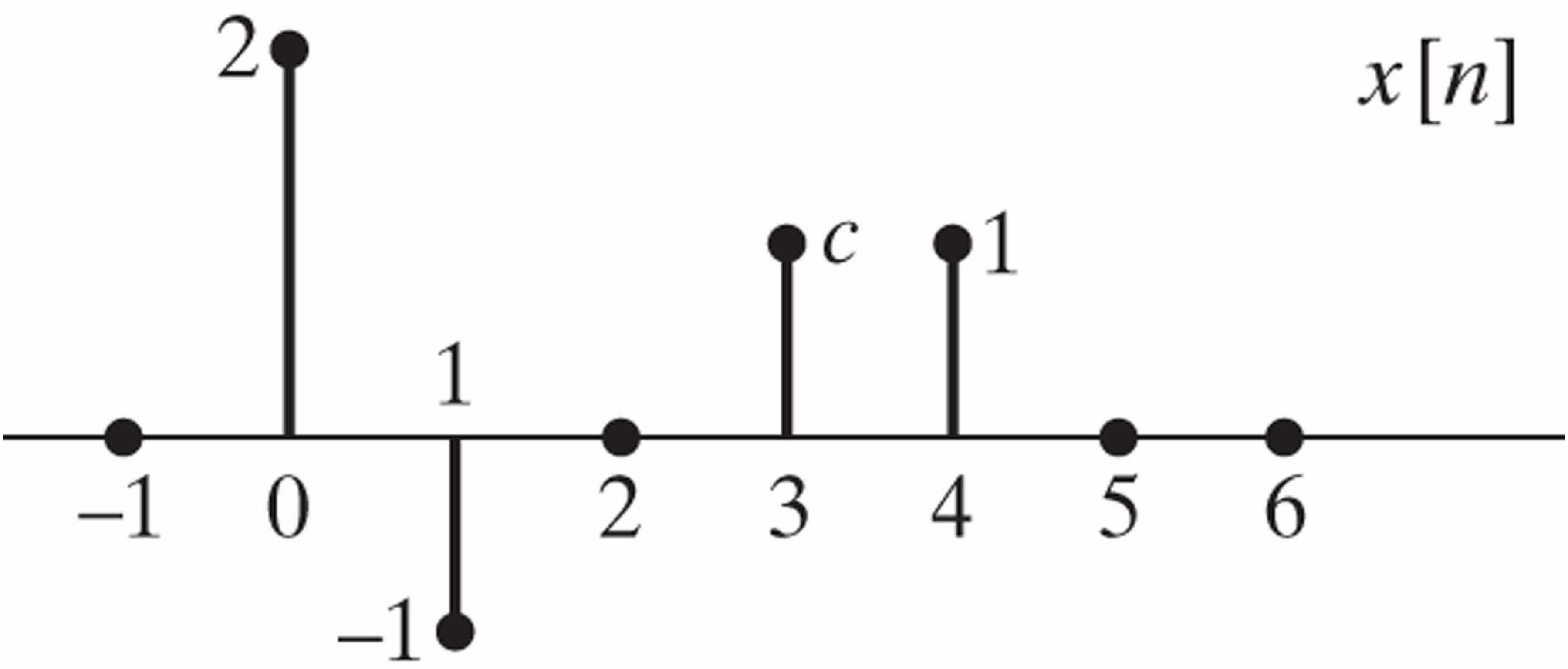


Figure P8.18-2

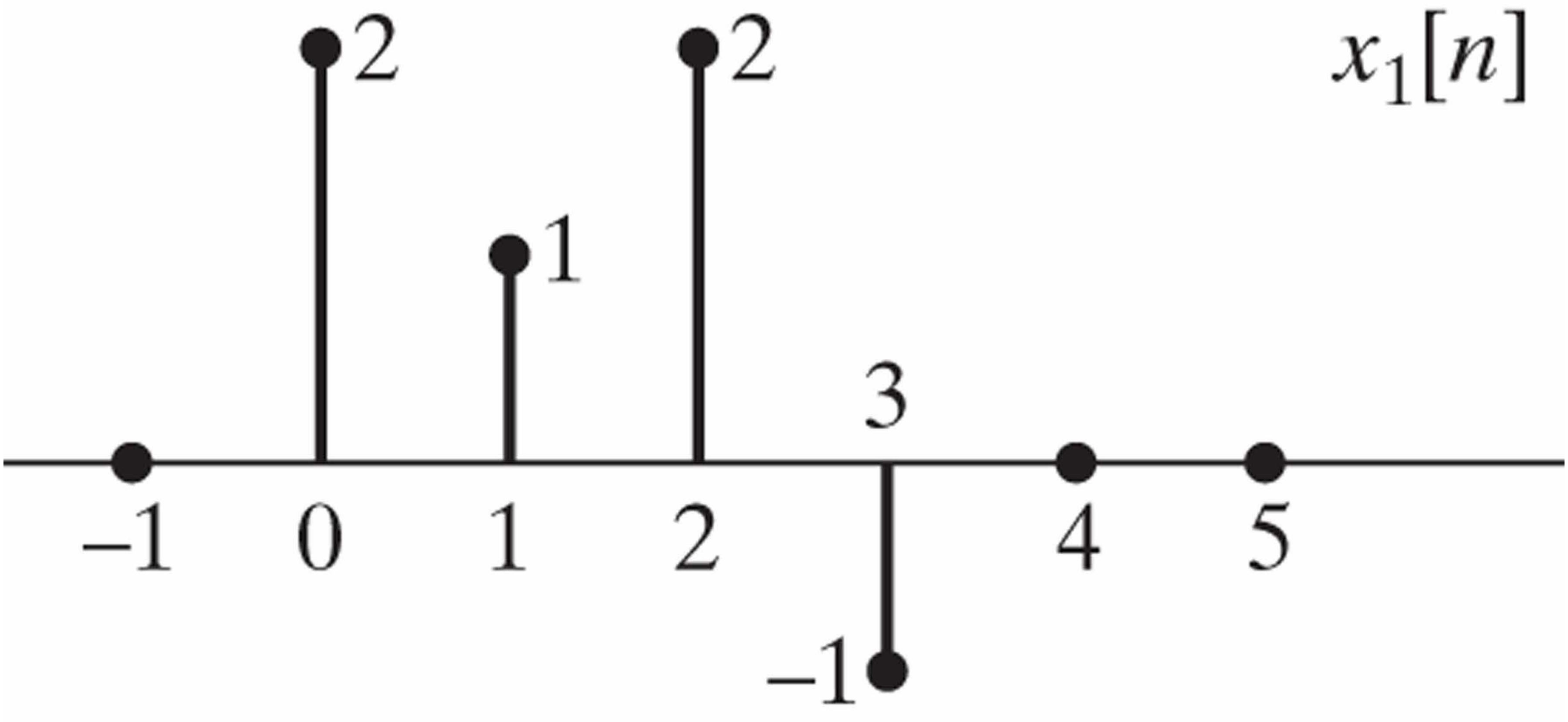
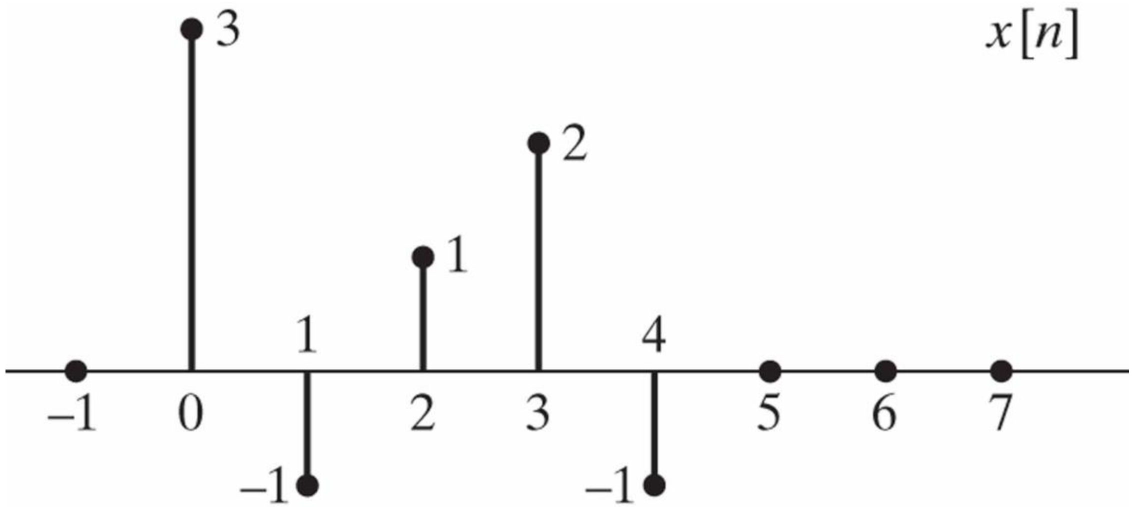


Figure P8.19



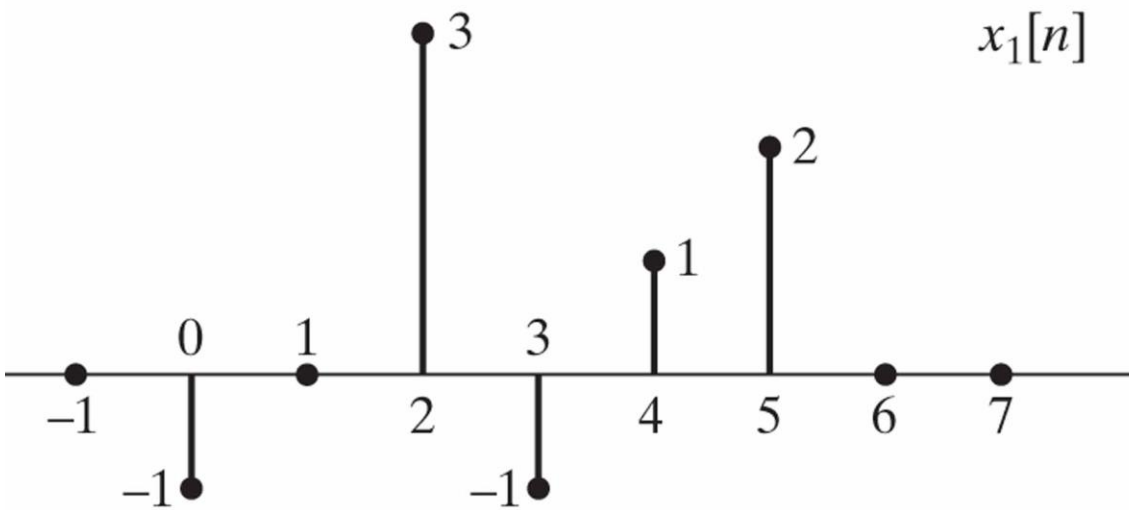


Figure P8.20

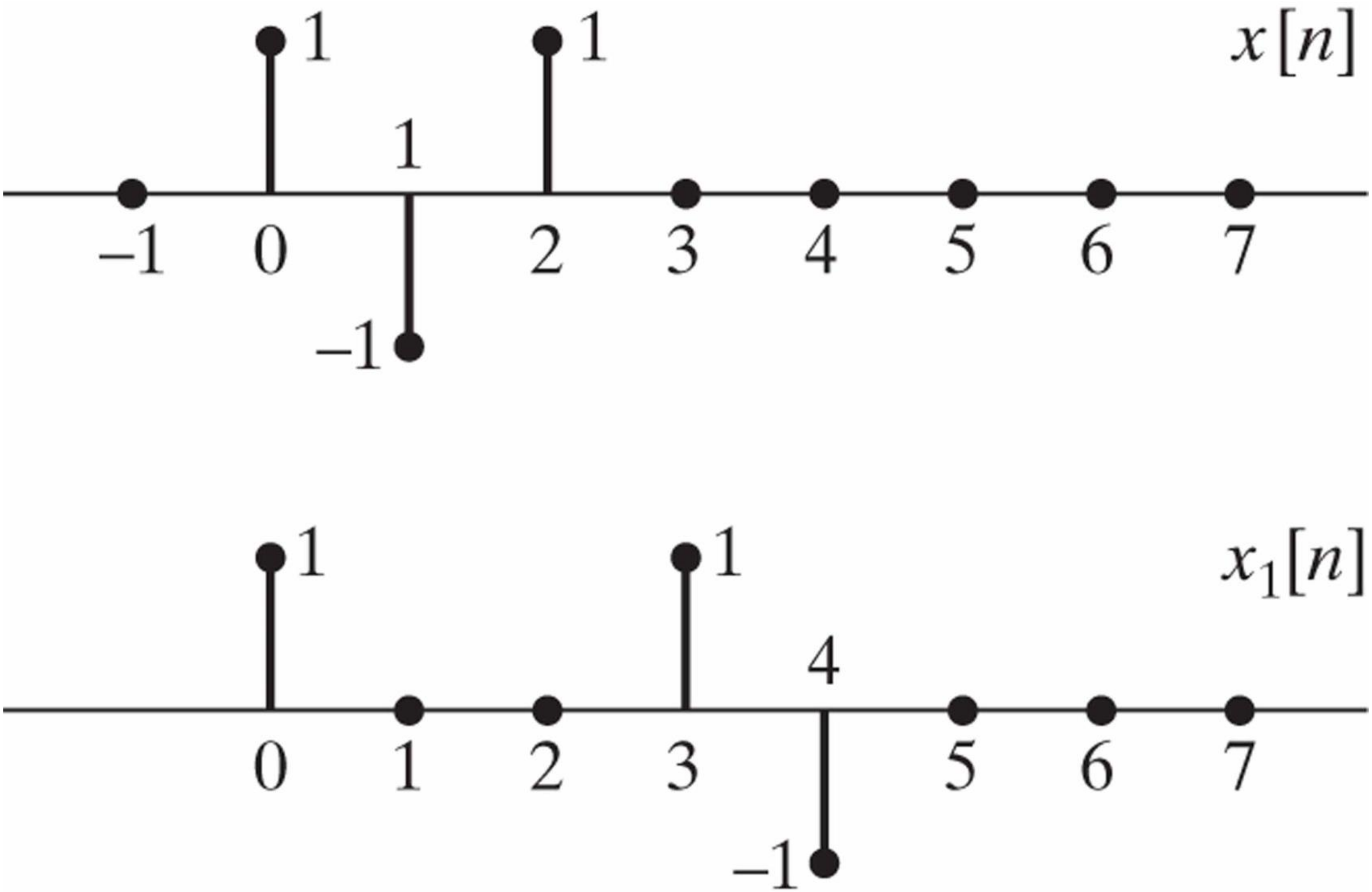


Figure P8.21-1

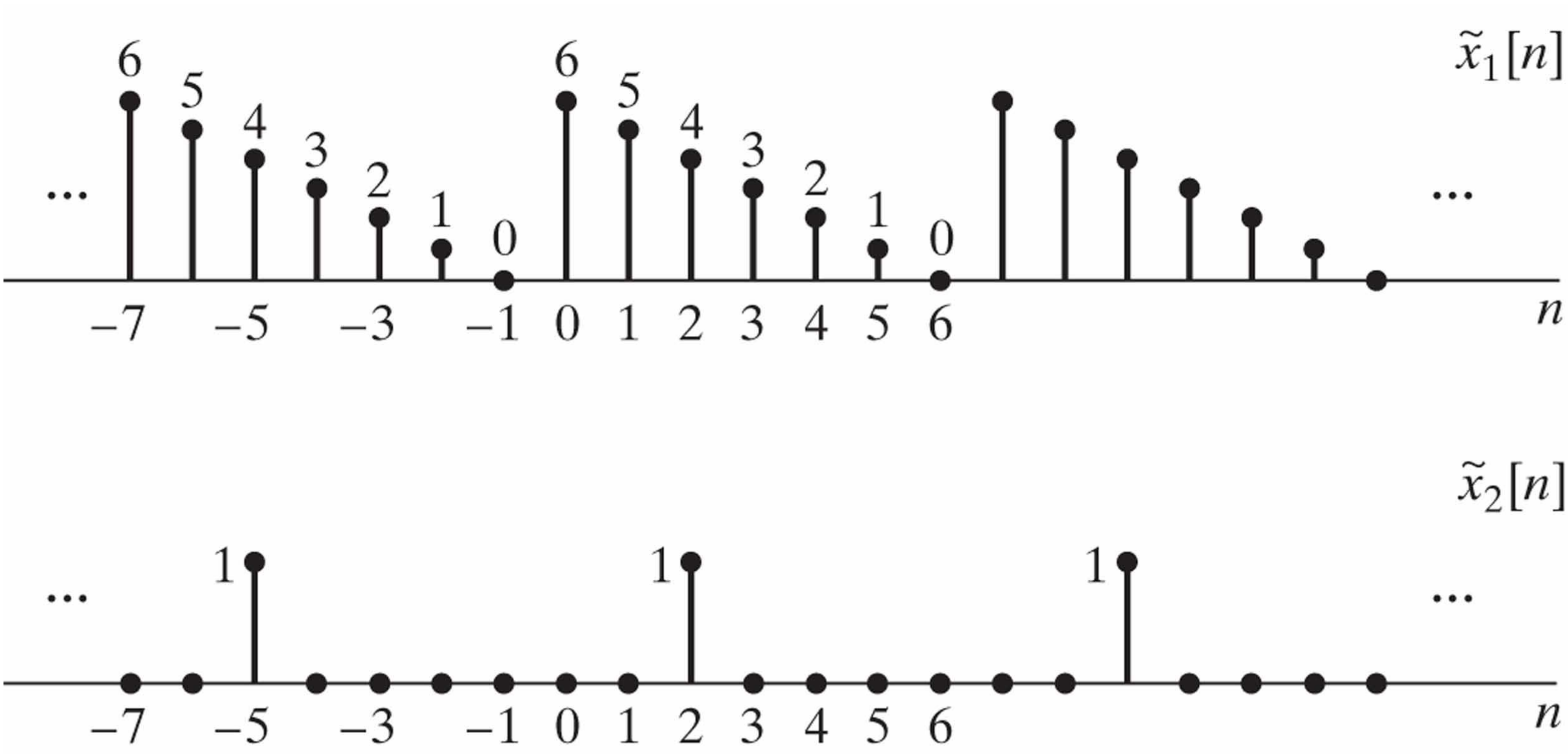


Figure P8.21-2

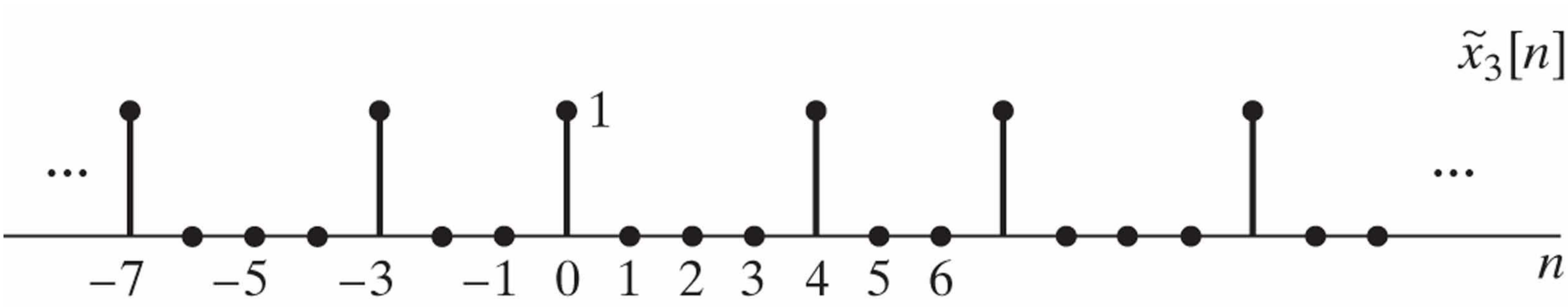


Figure P8.23

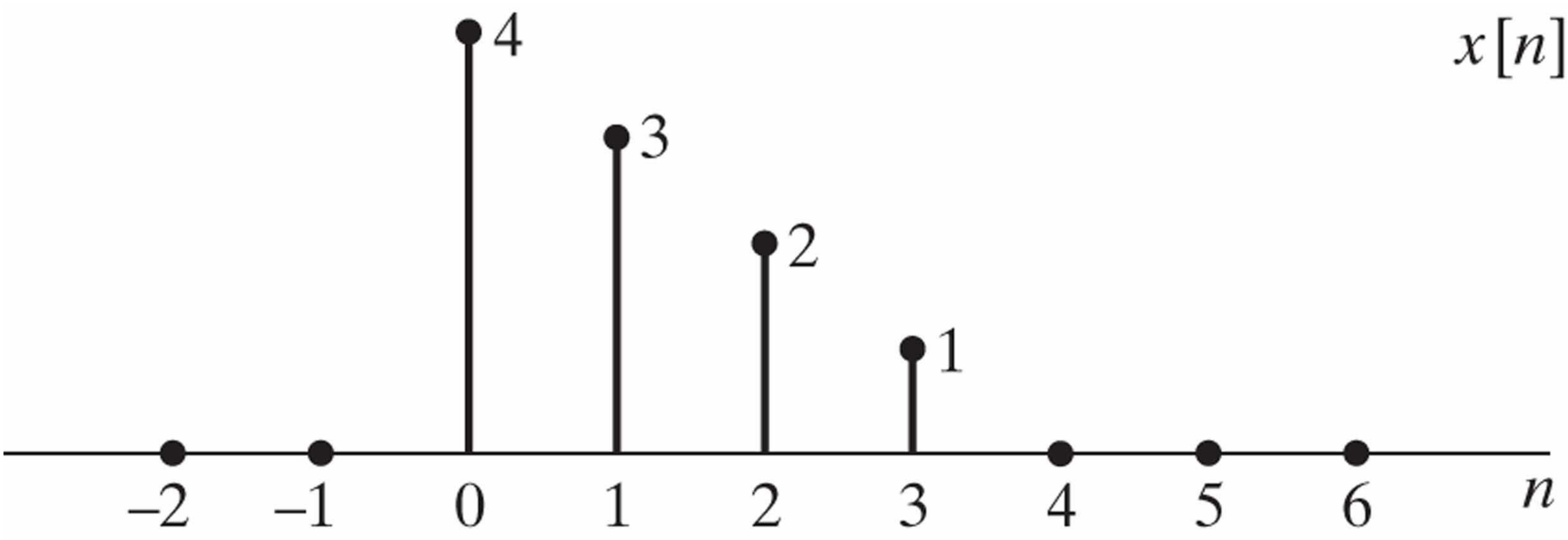


Figure P8.24

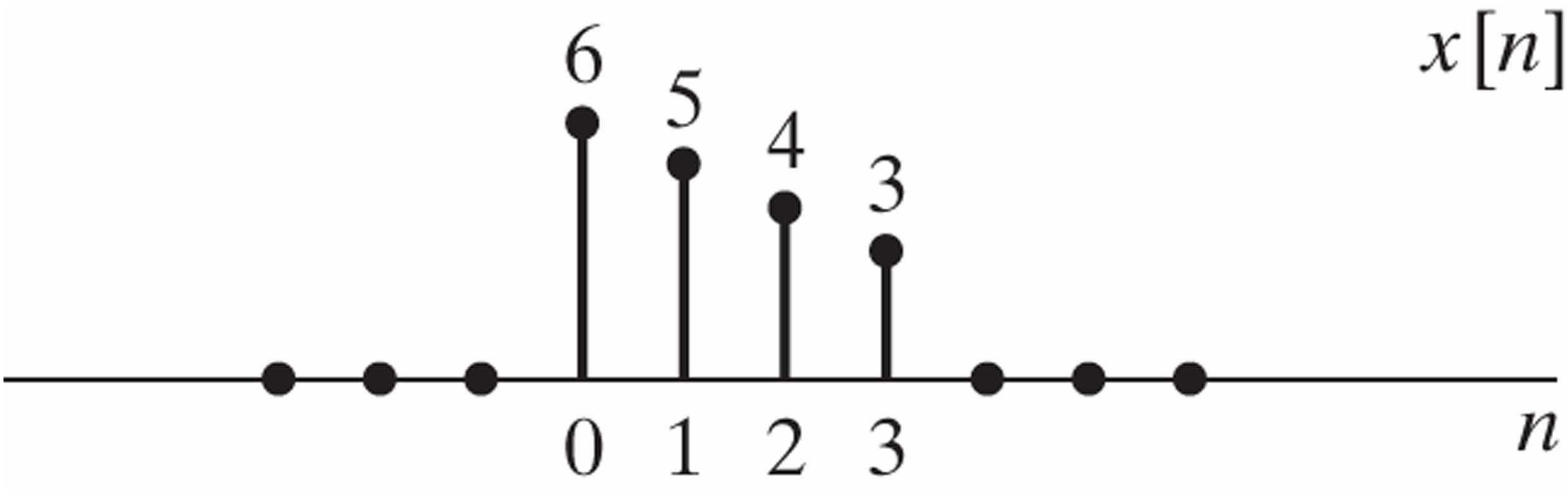


Figure P8.28

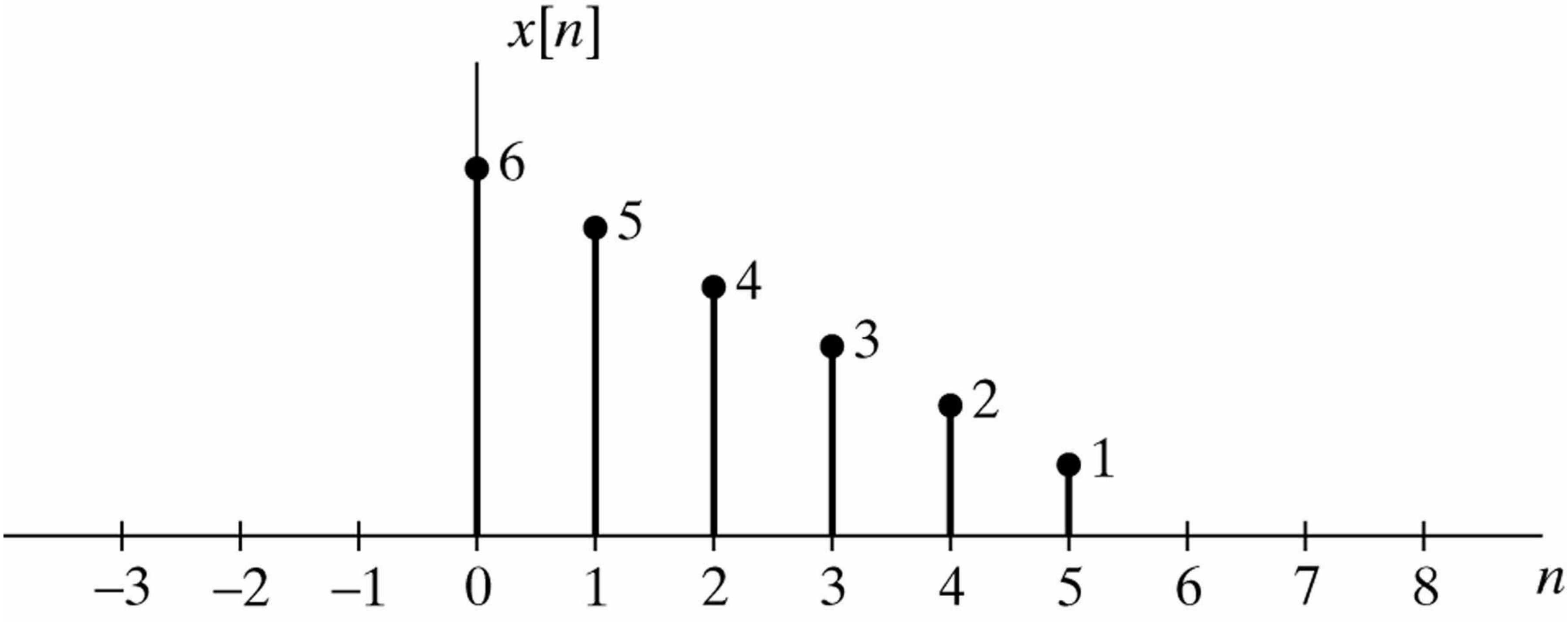


Figure P8.35-1

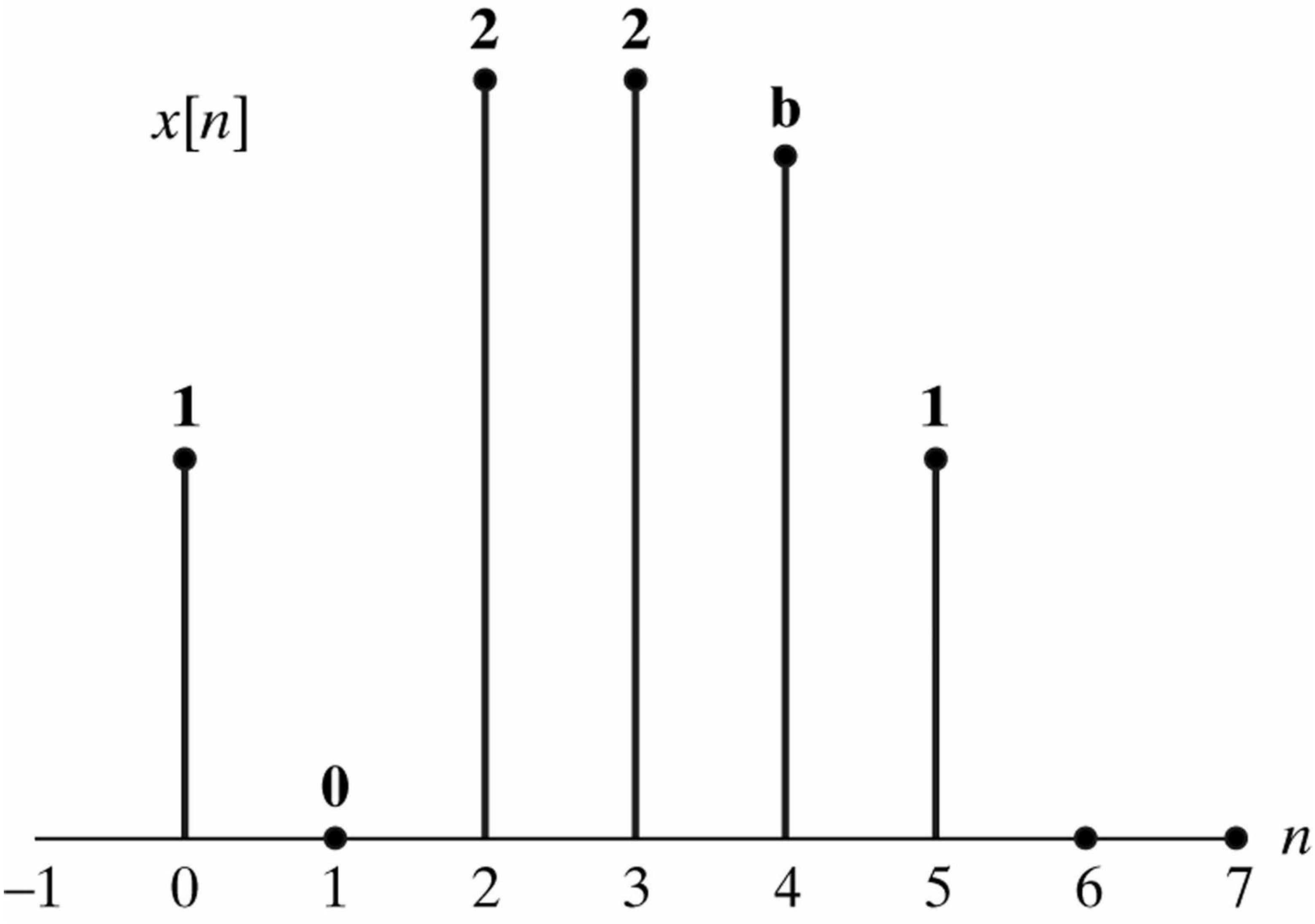


Figure P8.35-2

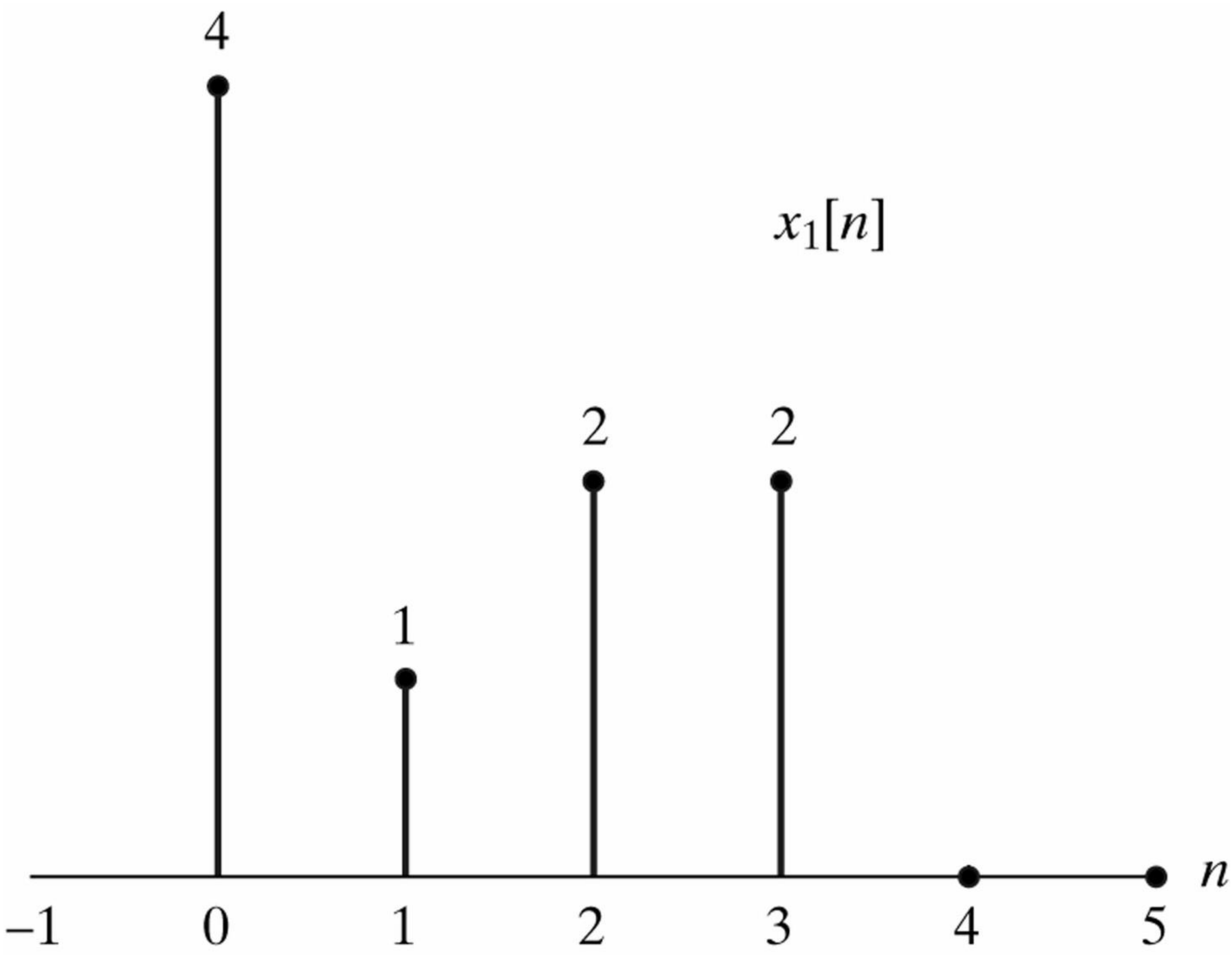


Figure P8.39

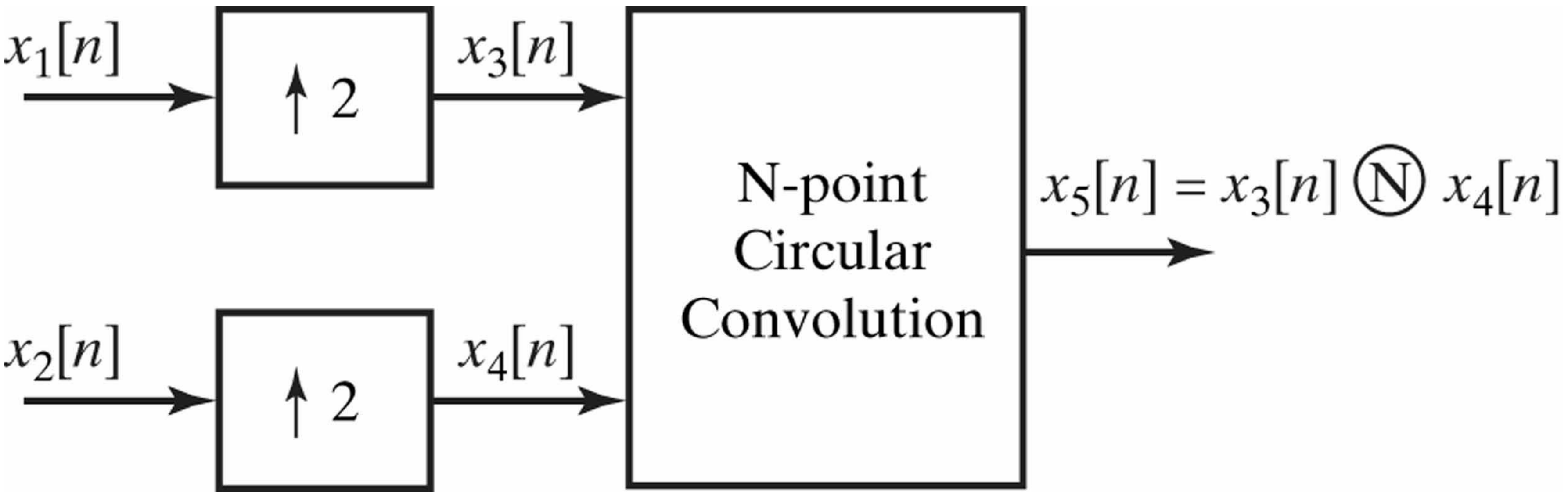

$x_1[n]$
$\uparrow 2$
$x_3[n]$
N-point
Circular
Convolution
$x_5[n] = x_3[n] \circledN x_4[n]$
$x_2[n]$
$\uparrow 2$
$x_4[n]$

Figure P8.40

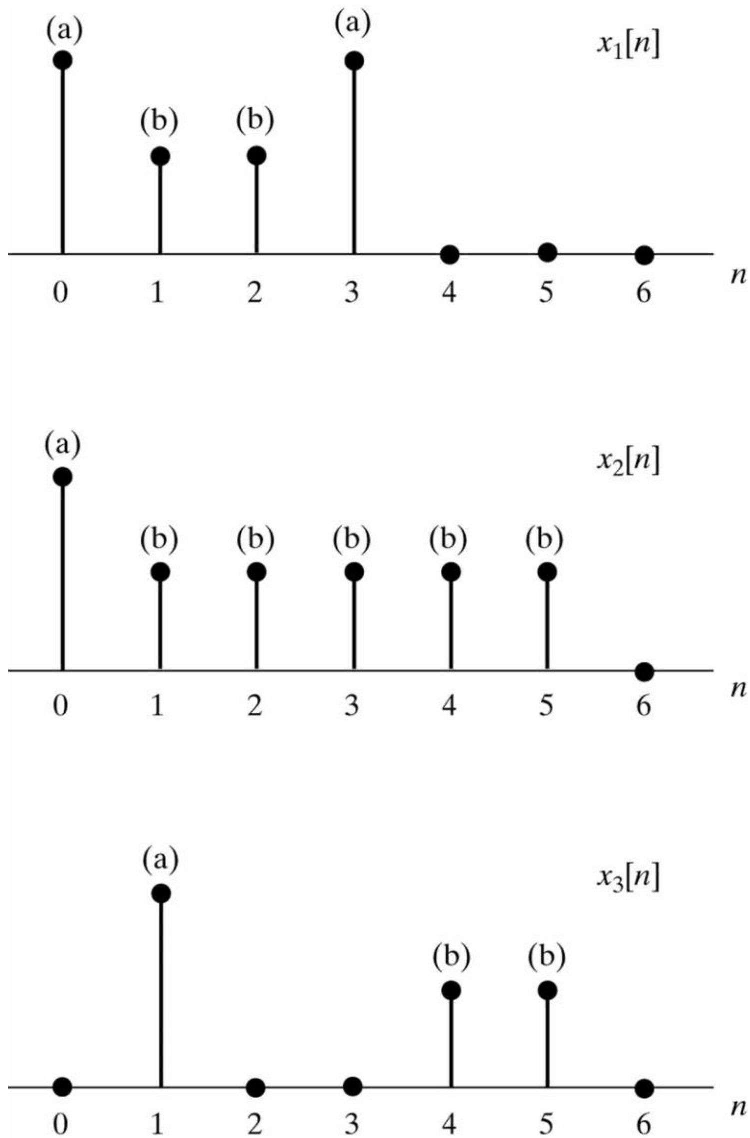


Figure P8.41

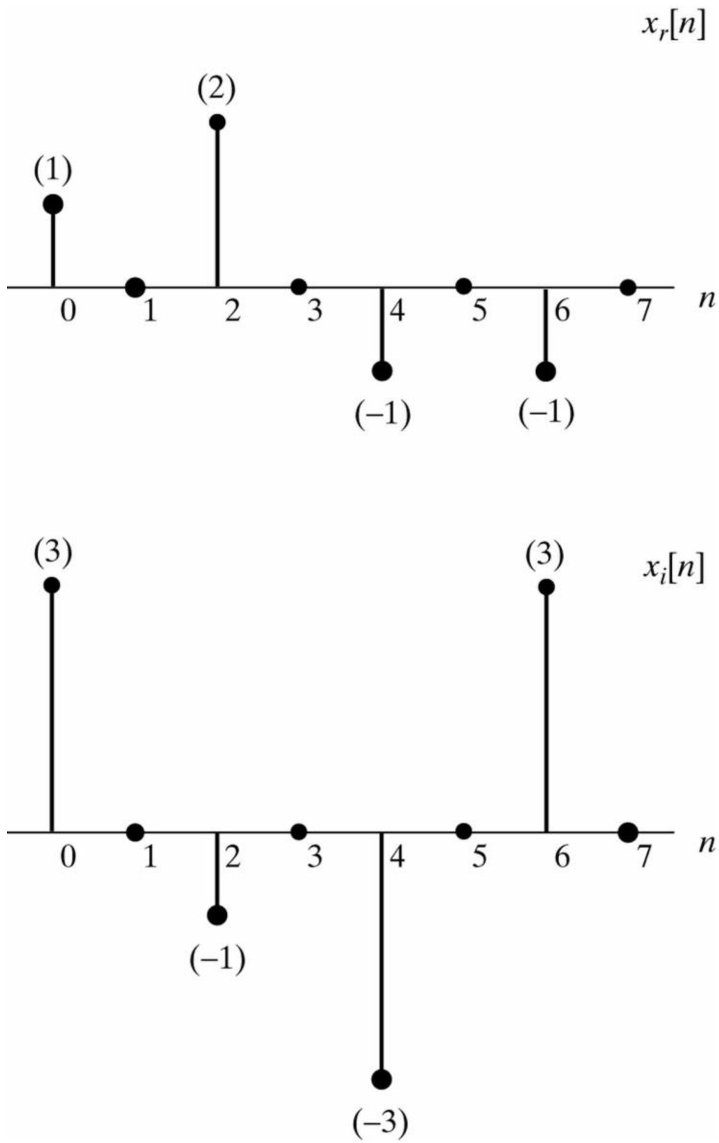


Figure P8.43

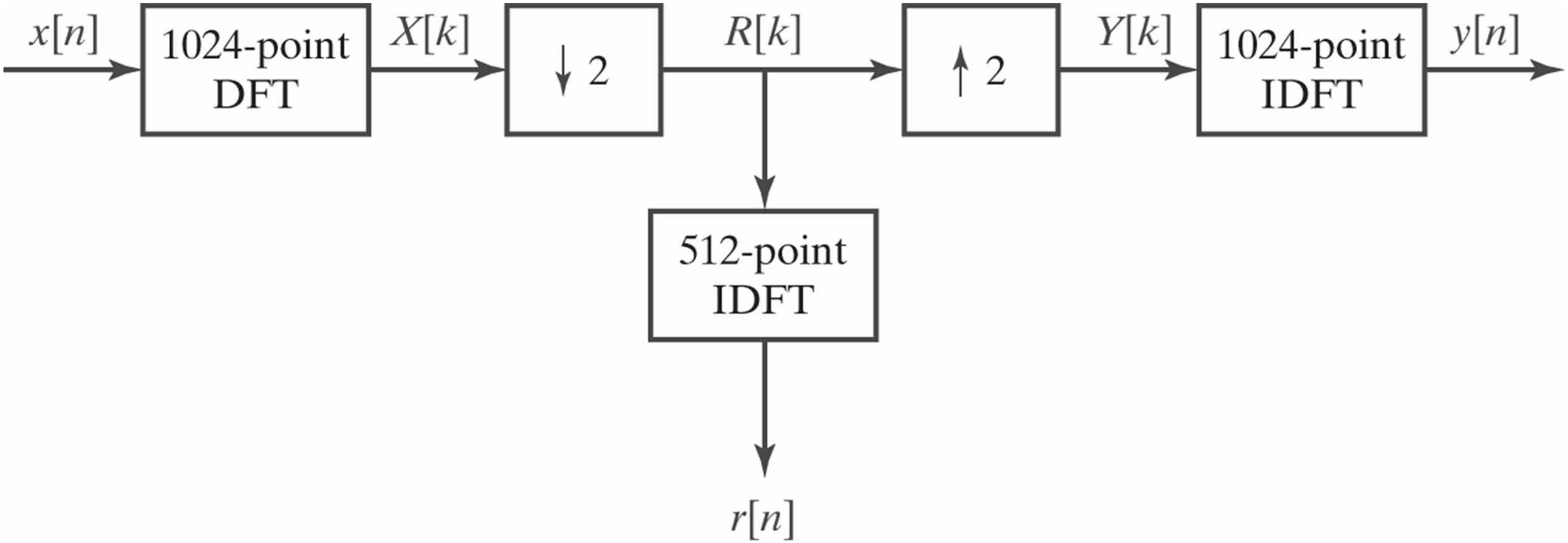

$x[n]$
1024-point DFT
$X[k]$
$\downarrow 2$
$R[k]$
$\uparrow 2$
$Y[k]$
1024-point IDFT
$y[n]$
512-point IDFT
$r[n]$

Figure P8.44

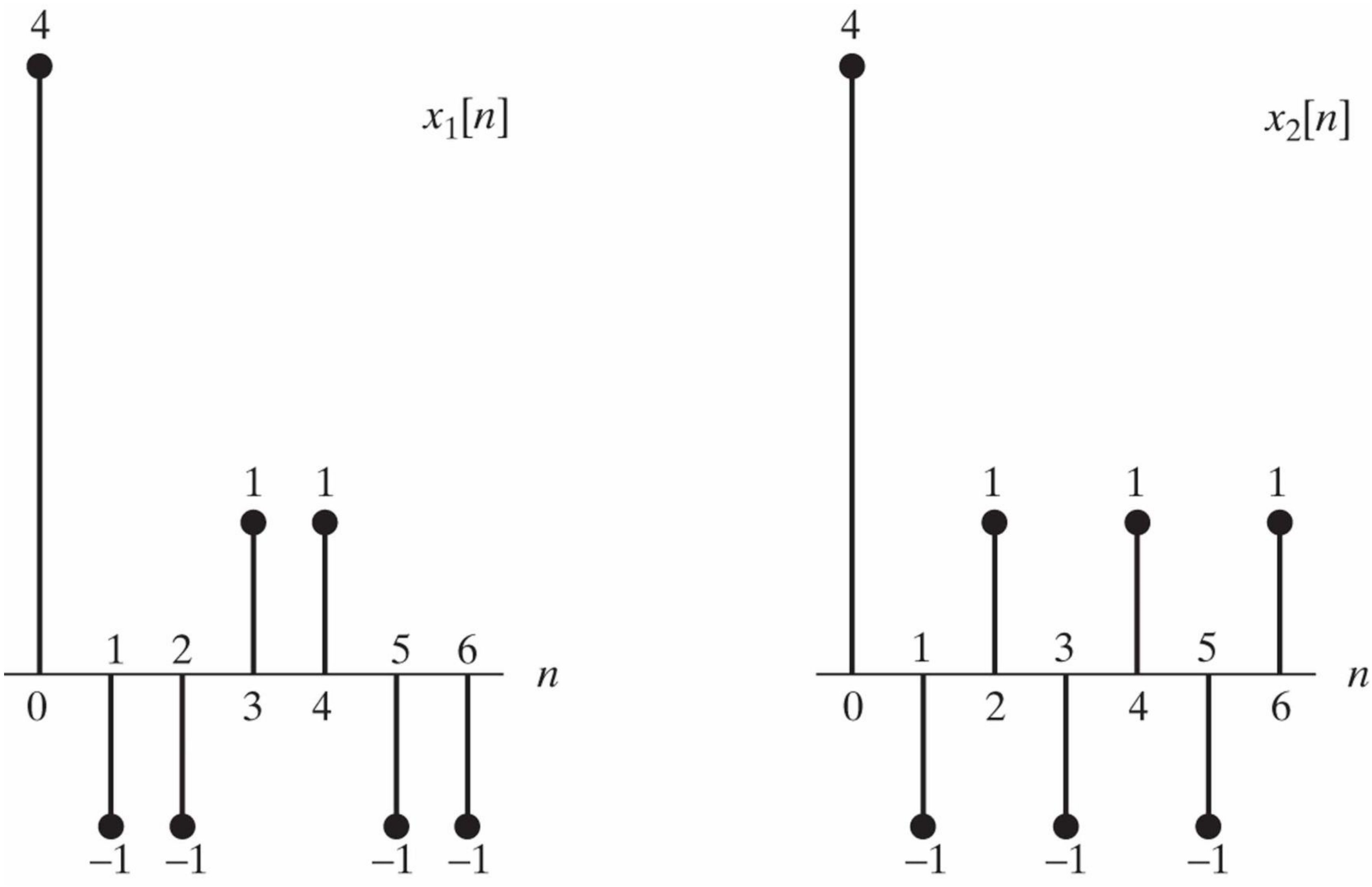


Figure P8.50-1

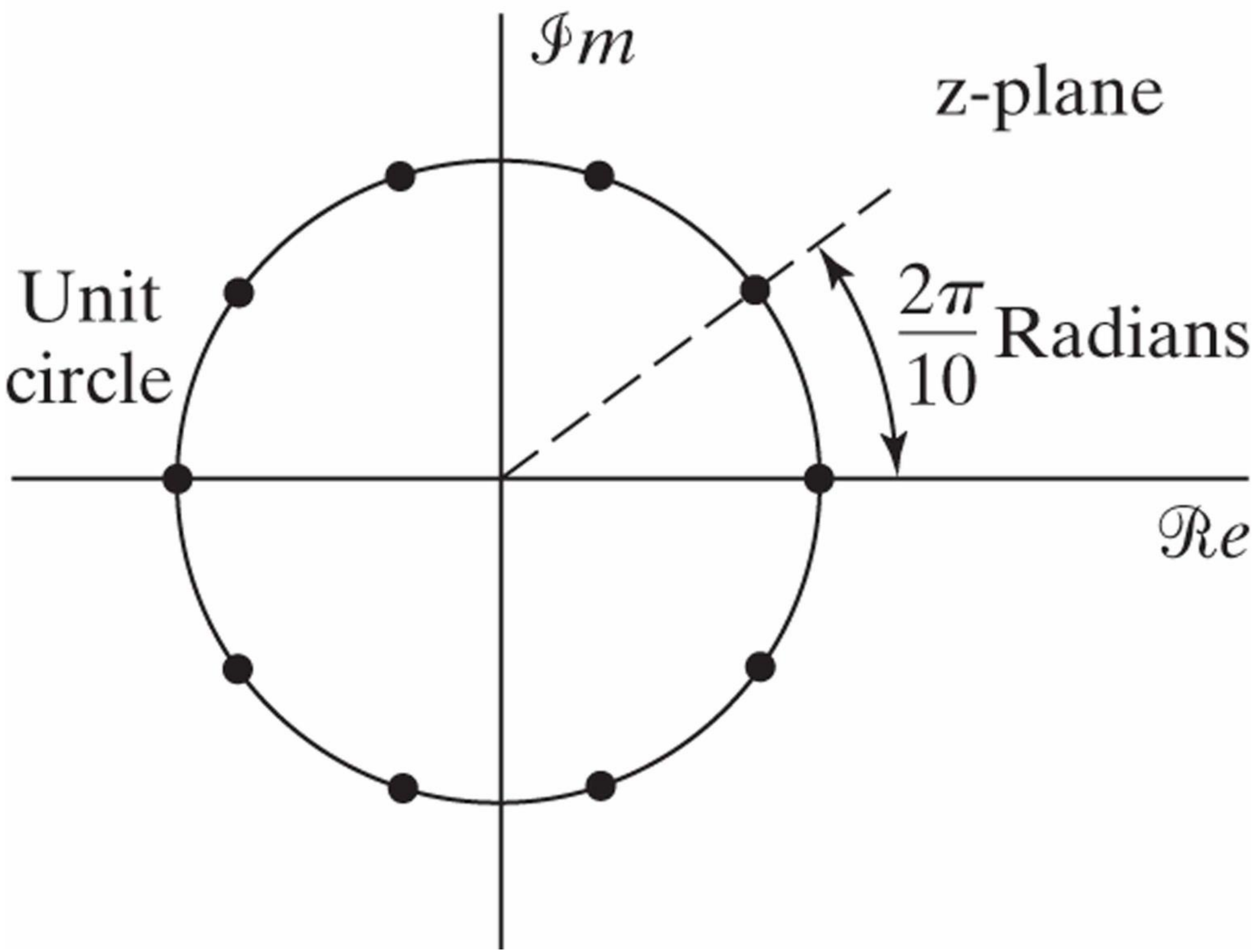


Figure P8.50-2

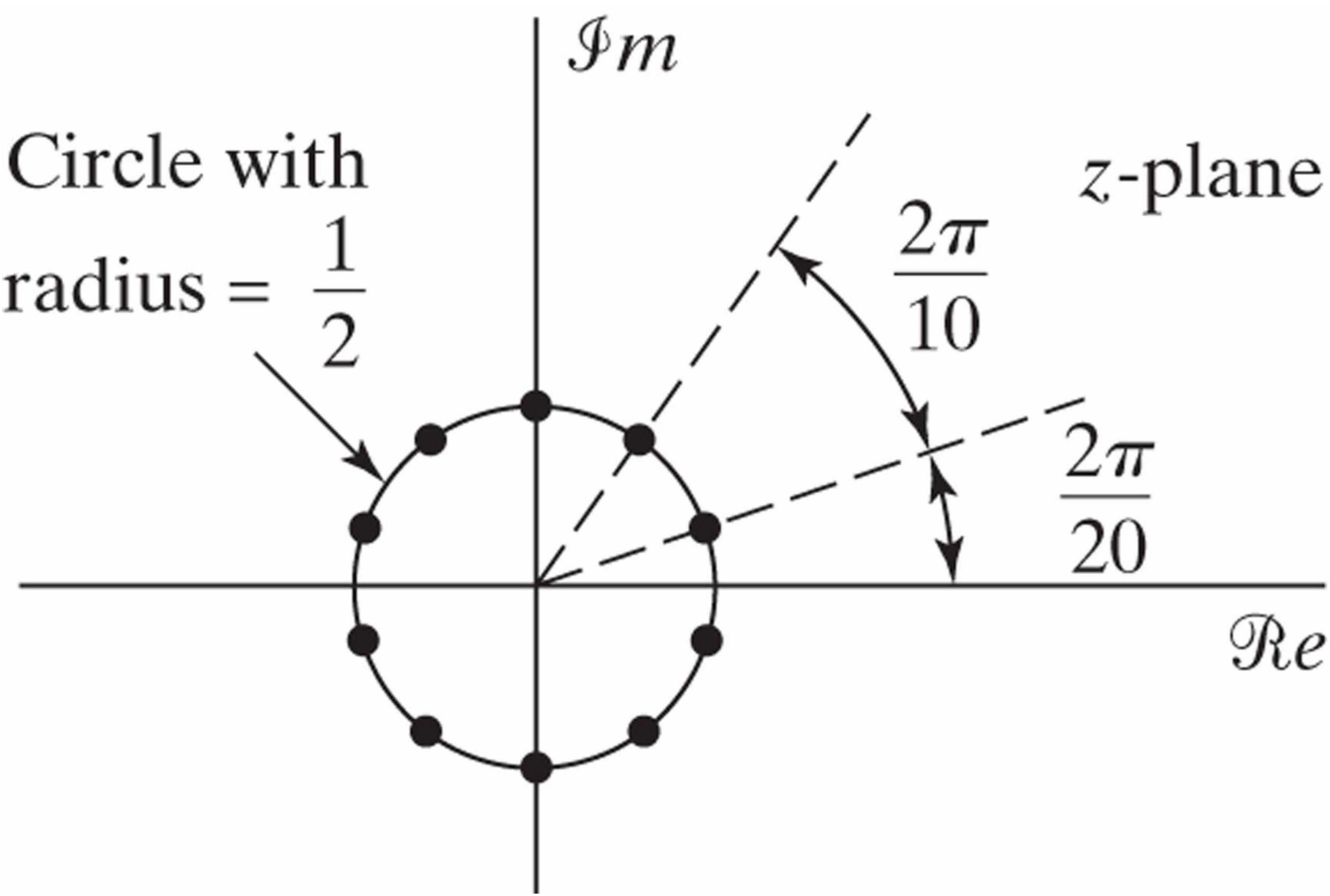


Figure P8.62

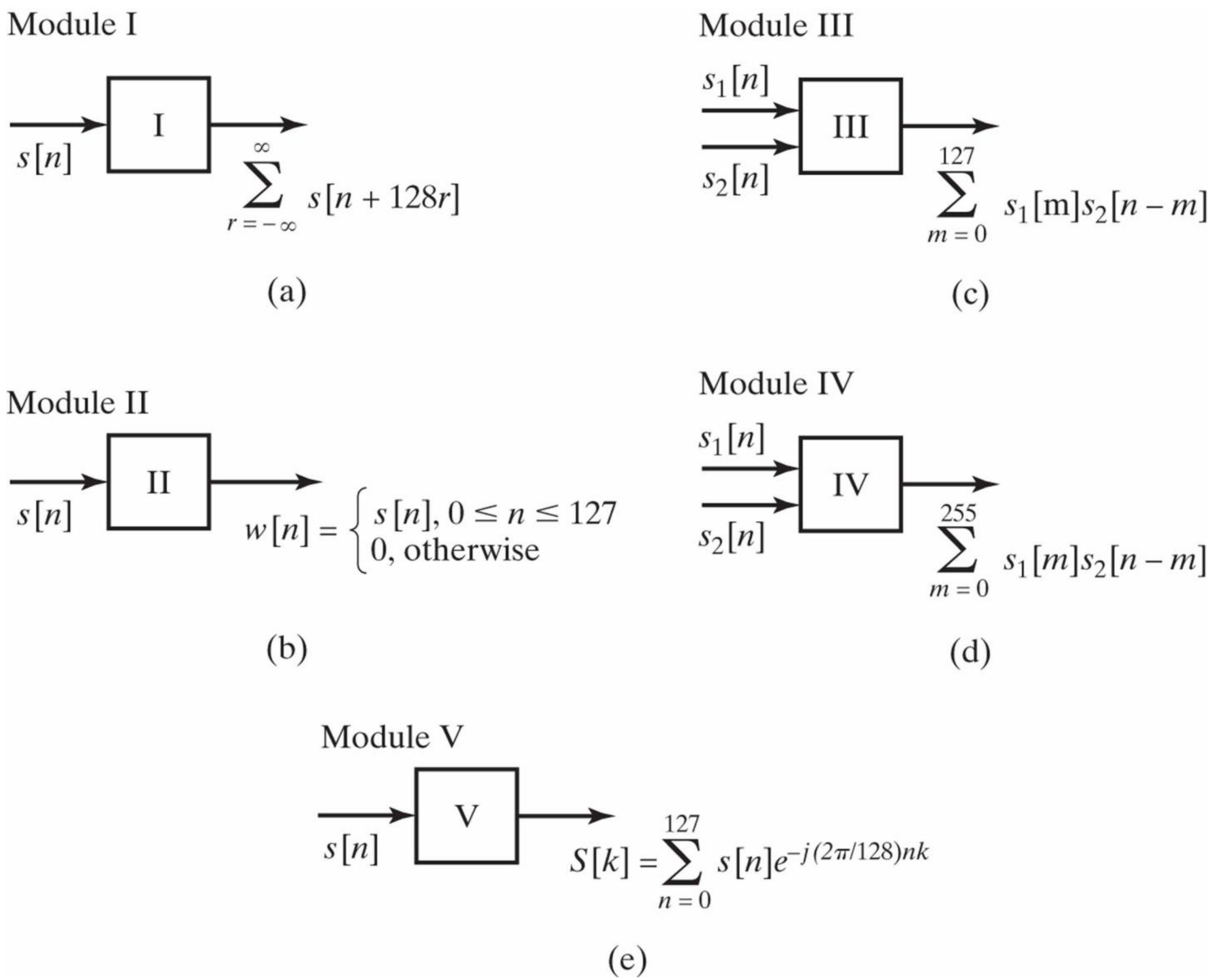

Module I
I
s[n]
$\sum_{r=-\infty}^{\infty} s[n+128r]$
(a)
Module III
$s_1[n]$
$s_2[n]$
III
$\sum_{m=0}^{127} s_1[\mathrm{m}]s_2[n-m]$
(c)
Module II
II
s[n]
$w[n] = \begin{cases} s[n], & 0 \le n \le 127 \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$
(b)
Module IV
$s_1[n]$
$s_2[n]$
IV
$\sum_{m=0}^{255} s_1[m]s_2[n-m]$
(d)
Module V
V
s[n]
$S[k] = \sum_{n=0}^{127} s[n]e^{-j(2\pi/128)nk}$
(e)

Figure P8.69-1

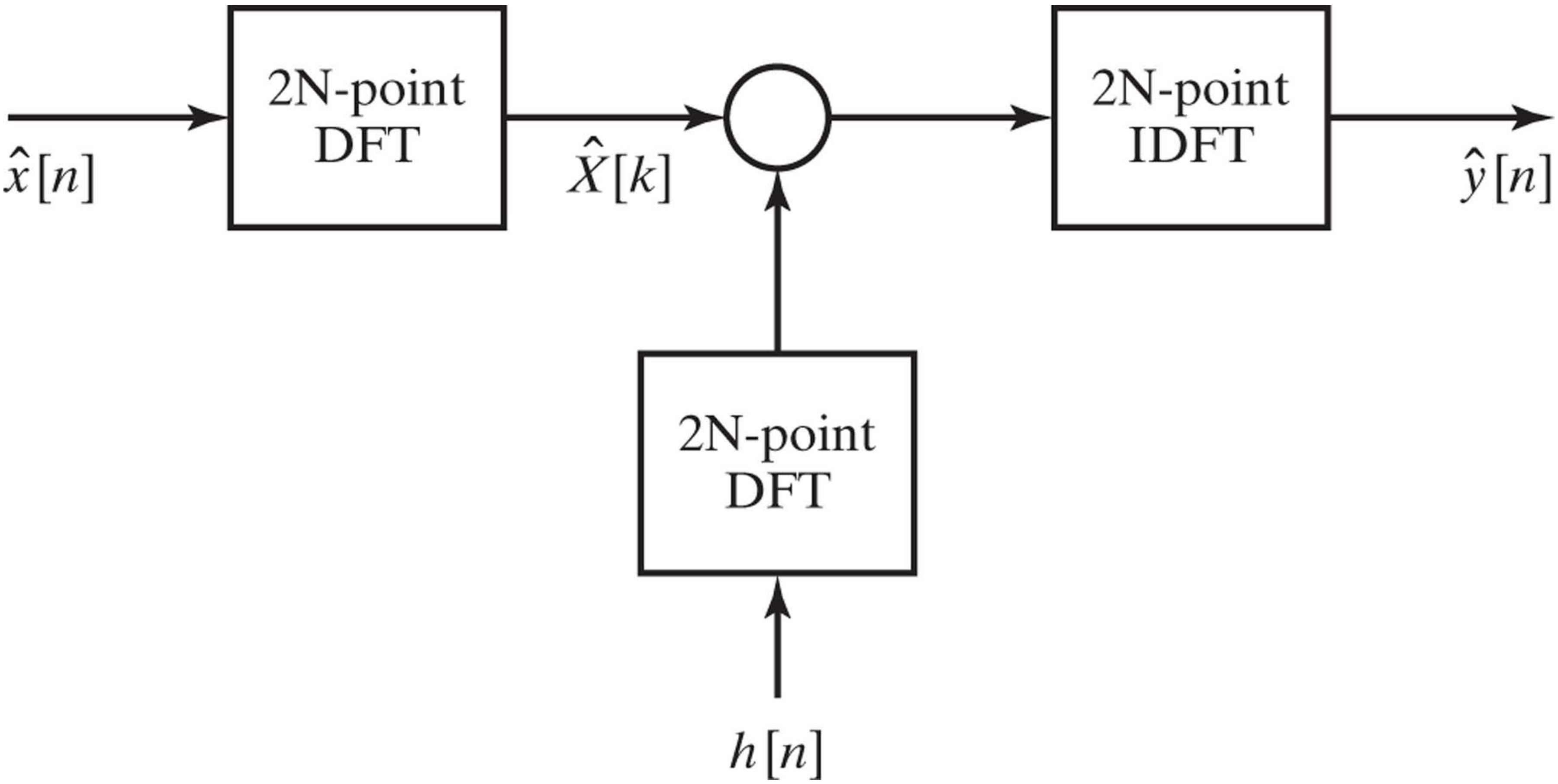


Figure P8.69-2

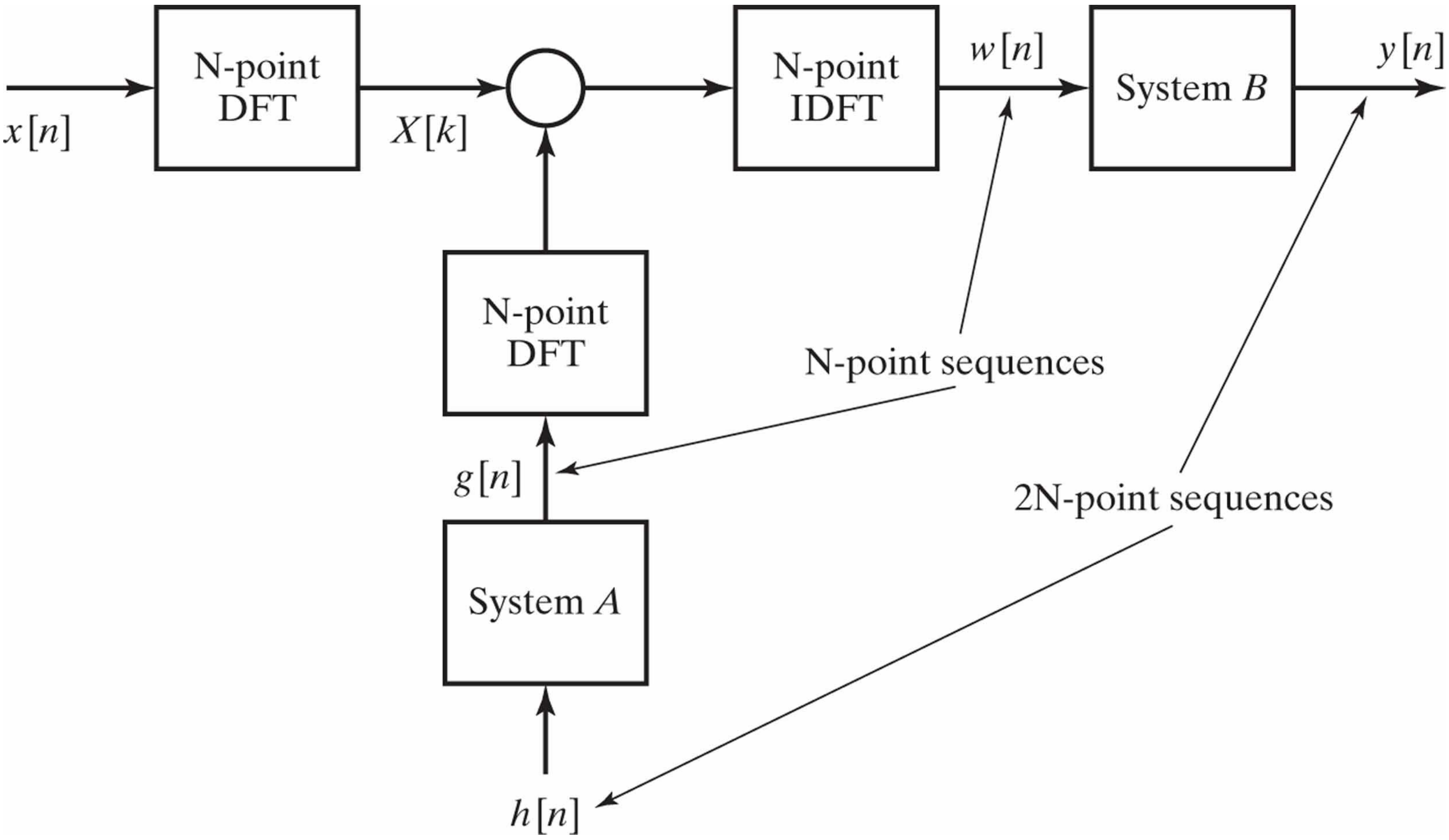


Figure P8.70-1

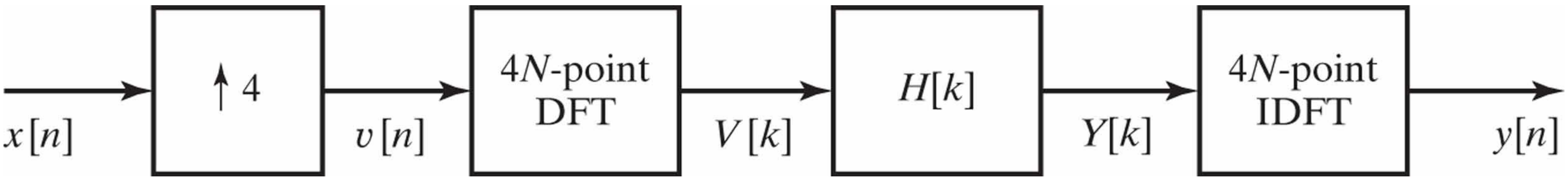


Figure P8.70-2